Определение упругих характеристик основания балки

Утяшев И.М., Юлмухаметов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются обратная коэффициентная задача об определении упругих характеристик основания прямоугольной балки по собственным частотам изгибных колебаний. Балки на упругом основании широко применяются в современных инженерных конструкциях различного назначения. Например, шпалы железнодорожного пути, рельсы, ленточные фундаменты, а также различные виды трубопроводов. Существуют разные модели упругого основания. Наиболее широко применяется в расчетах модель «винклерова» основания (гипотеза Винклера) [1], связывающая величины реакций с деформацией основания. В данной модели упругое основание рассматривается как система опирающихся на жесткое горизонтальное основание и не связанных между собой пружин, сжатие которых возрастает прямо пропорционально приложенной нагрузке.

Наиболее близкие к данной задаче работы рассмотрены в [2, 3]. В [2] решается задача о напряженно деформированном состоянии балки, находящейся в грунте с переменными свойствами по глубине. В [3] выведена формула определения коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.

В настоящей работе требуется определить закон изменения упругости основания. Для решения поставленной задачи требуется установить зависимость собственных значений балки Эйлера-Бернулли от переменного коэффициента постели. Будем рассматривать случай, когда коэффициент постели моделируется многочленом второй степени $k(x) = px^2 + qx + c$. Тогда уравнение изгибных колебаний балки запишется в виде

$$EI\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + k(x)u(x,t) + \rho F\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $u(x,t)$ – прогиб оси балки, ρ – ее плотность, F – площадь поперечного сечения $EI = const$ – изгибная жесткость. При $t = 0$ должны выполнятся начальные условия

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x),$$

где $f(x)$, $g(x)$ – функции, определяющие начальное положение и скорость оси балки.

Граничные условия не зависят от того, связана балка с упругим основанием или нет. Они определяются условиями закрепления и нагруженности концов стержня. Поэтому краевые условия шарнирно-опертого закрепления могут быть перенесены на случай балок, связанных с упругим основанием:

$$x = 0: \quad u(0,t) = 0, \quad EI\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0;$$

$$x = L: \quad u(L,t) = 0, \quad EI\frac{\partial^2 u(L,t)}{\partial x^2} = 0.$$

При замене $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t)$ поставленная выше задача сводится к следующей спектральной задаче

$$y^{(4)}(x) + (k_1(x) - \lambda^4)y(x) = 0, \tag{1}$$

$$U_1 = y(0) = 0, \quad U_2 = y''(0) = 0;$$
$$U_3 = y(1) = 0, \quad U_4 = y''(1) = 0. \tag{2}$$

где $\lambda^4 = \dfrac{\rho F\omega^2}{EI}$, $k_1(x) = \dfrac{k(x)}{EI}$.

Общее решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = y(x,\lambda) = C_1 y_1(x,\lambda) + C_2 y_2(x,\lambda) + C_3 y_3(x,\lambda) + C_4 y_4(x,\lambda). \tag{3}$$

Здесь, $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, $y_3(x,\lambda)$, $y_4(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (1). Эти функции будем строить в виде ряда Маклорена по переменным x и λ.

Подставив общее решение (3) в краевые условия (2), получим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} y_3(1) & y_4(1) \\ y_3''(1) & y_4''(1) \end{vmatrix} = 0.$$

Данное выражение содержит в себе искомые величины коэффициента постели $k(x) = px^2 + qx + c$. Для восстановления трех неизвестных p, q, c требуется три собственных значения задачи (1)-(2). Численные эксперименты показали, что наименьшая погрешность достигается использованием собственных значением с наименьшим номером.

Исследование выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00420, https://rscf.ru/project/23-21-00420/

Список литературы

[1] Балки и плиты на упругом основании. Лекции с примерами расчета по специальному курсу строительной механики: учеб. пособие / А.Ю. Цвей. – М.: МАДИ, 2014. 96 с.
[2] Масленников А.М., Улитин В.В. Балки на упругом основании с переменными параметрами // Строительство: Новые технологии – новое оборудование. 2017. № 1. С. 22-26.
[3] Курбацкий Е.Н., Купчикова Н.В. Определение коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с помощью дифференциальных уравнений в обобщенных функциях // Перспективы развития строительного комплекса. 2012. Т. 2. С. 47-49.