2024
Многофазные системы:
модели, эксперимент, приложения
ИМех им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Изгиб однослойного графена под действием среднего давления

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работах [1], [2] рассматривается поперечное обтекание круговой цилиндрической оболочки плоским безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости с нелинейными граничными условиями. В [2] учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения. Анализируется влияние действия среднего давления. В [3] изучено влияние среднего избыточного давления на цилиндрический изгиб пластины.

Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена под действием среднего давления (рис. 1). Ставится задача определения формы, усилий и моментов в однослойном графене. Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена, для элемента которого запишем уравнения равновесия [4]

$$\frac{dT}{ds}+\frac{Q}{R}=0, \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{ds}-\frac{T}{R}-\frac{Ph}{R}=0, \tag{2}$$

$$Q=\frac{dM}{ds}, \tag{3}$$

где P - давление в окружающей среде. Изгибающий момент определяется

$$M=D\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_N}\right), \tag{4}$$

где R_N - радиус кривизны поперечного сечения однослойного графена в недеформированном начальном состоянии.

Из (1) с учетом (3) и (4) следует

$$T=T_0-\frac{D}{2}\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R_0^2}\right). \tag{5}$$

Уравнение (2) с учетом (3), (5) запишется

$$\frac{d^2\left(1/R\right)}{ds^2}+\frac{1}{2R^3}-\frac{Ph}{DR}-\left(\frac{1}{2R_0^2}+\frac{T_0}{D}\right)\frac{1}{R}=0. \tag{6}$$

Используя соотношения

$$u=\tfrac{a}{R},\ \xi=\tfrac{s}{a},\ x=\tfrac{x^*}{a},\ y=\tfrac{y^*}{a},\ t=\tfrac{Ta^2}{D},\ q=\tfrac{Qa^2}{D},\ m=\tfrac{Ma}{D},$$
$$\alpha=a^2\left(\tfrac{1}{2R_0^2}+\tfrac{T_0}{D}\right),\ \beta=\tfrac{Pha^2}{D},$$

уравнение (6) примет вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{u^3}{2}-\left(\alpha+\beta\right)u=0, \tag{7}$$

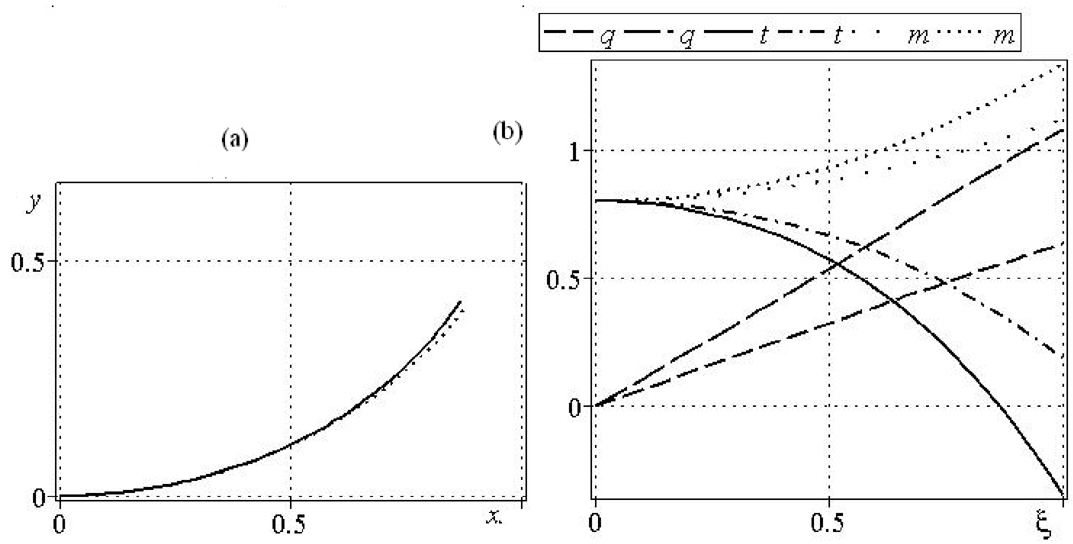

Рис. 1: Для параметров: m_0 = 0.8, t_0 = 0.8. (a) Форма поперечного сечения графена для параметра β=0.5 и 0 (сплошная и пунктирные линии соответственно). (b) Зависимости безразмерного усилия t, изгибающего момента m, перерезывающей силы q в графене от безразмерной дуговой абсциссы ξ для параметра β=0.5 (сплошная, пунктирная, длинная штриховая линии соответственно) и β=0 (штрих - пунктирная, спецпунктирная, штриховая линии соответственно).

Решение уравнения (7) с условиями при ξ = 0: u = $m0$, $du/d\xi$ = 0 выражается через эллиптический синус sn(ξ) и обратный эллиптический синус arcsn(ξ)

$$\begin{aligned} &u\left(\xi\right) = \tfrac{1}{m_0}\times \\ &\times\left\{\sqrt{4\left(\alpha+\beta\right)-m_0^2}\,\mathrm{sn}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{I}m_0\xi+\mathrm{arcsn}\left(\tfrac{m_0}{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}},\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right),\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Производная $du(\xi)/d\xi$ определяется через эллиптический косинус cn(ξ) и дельта амплитуду dn(ξ)

$$\begin{aligned} &\tfrac{du(\xi)}{d\xi} = \tfrac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{4\left(\alpha+\beta\right)-m_0^2}\times \\ &\times\mathrm{cn}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{I}m_0\xi+\mathrm{arcsn}\left(\tfrac{m_0}{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}},\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right),\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right]\times \\ &\times\mathrm{dn}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{I}m_0\xi+\mathrm{arcsn}\left(\tfrac{m_0}{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}},\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right),\tfrac{\sqrt{4(\alpha+\beta)-m_0^2}}{m_0}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

На рис. 1, а приводится форма поперечного сечения графена. Видно, что среднее давление уменьшает кривизну линии поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия t, изгибающего момента m, перерезывающей силы q в графене приводится на рис. 1, b. Видно, что усилия натяжения меньше в точках удаленных от оси x.

Получены нелинейные уравнения изгиба однослойного графена. В рассматриваемом примере среднее давление приводит к увеличению усилий и моментов.

Если в точке O усилие натяжения равно нулю T_0 = 0, кривизна поперечного сечения k = 0 также равна нулю, изгибающий момент m_0 = 0, поэтому

$$T = -\frac{D}{2}\frac{1}{R^2}. \tag{10}$$

Уравнение (2) с учетом (3) запишется

$$\frac{d^2\left(1/R\right)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} = 0. \tag{11}$$

Переходя к безразмерным переменным, запишем уравнение (11)

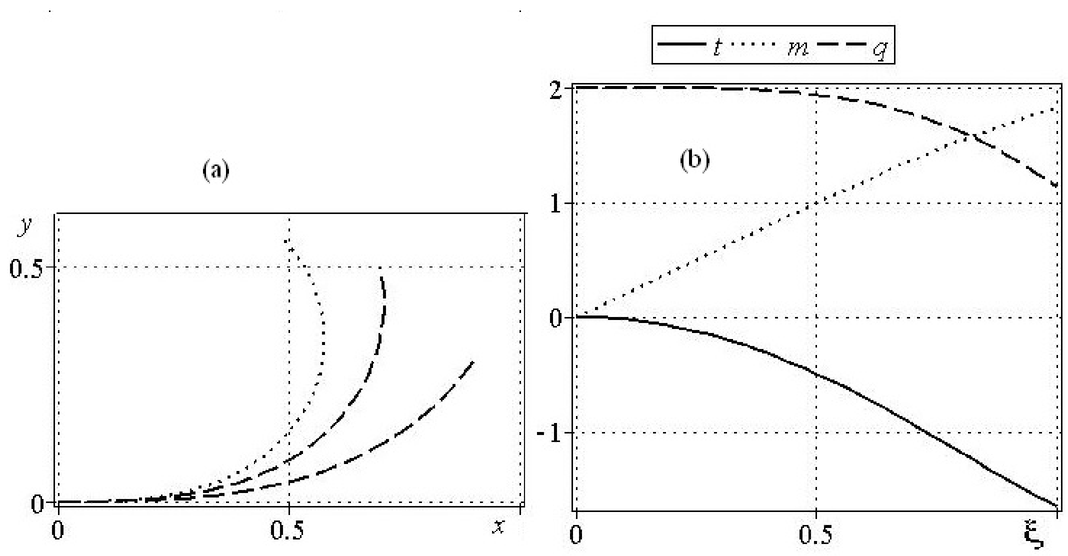

Рис. 2: Для параметров: m_0 = 0, t_0 = 0. (a) Формы поперечного сечения графена при различных q_0 = 6; 4; 2 (пунктирная, штриховая, сплошная линии, соответственно). (b) Зависимости безразмерного усилия t, изгибающего момента m, перерезывающей силы q в графене от безразмерной дуговой абсциссы ξ q_0= 2.

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} = 0, \tag{12}$$

Решение уравнения (12) с условиями при ξ = 0: u = 0, $du/d\xi$ =q_0 выражается через эллиптический синус $u\left(\xi\right) = \sqrt{2}\sqrt{q_0}\mathrm{sn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right)$.

Безразмерные усилия и момент определяются

$$t = -\frac{u^2}{2}, \quad q = \frac{du}{d\xi} = q_0\mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right) \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2}\xi, i\right), \quad m = u,$$

где перерезывающая сила определяется через эллиптические косинус cn и дельта амплитуду dn. На рис. 2, а приводятся формы поперечного сечения пластинок при различных q_0. С увеличением q_0 происходит увеличение прогибов однослойного графена. Распределение безразмерного усилия t, изгибающего момента m, перерезывающей силы q, в графене для q_0 = 2 приводится на рис. 2, b. Видно, что усилия натяжения меньше в точках удаленных от оси x.

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№0246-2023-0015).

Автор благодарит член – корреспондента РАН М.А. Ильгамова за постановку и обсуждение задачи.

Список литературы

[1] Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. № 6. 1975. С. 147-151. DOI: 10.1007/BF01023279

[2] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. №2. С. 12-18. DOI: 10.31857/S0568528120020073

[3] Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402-405. DOI: 10.7868/S086956521728009X

[4] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. Издательство Московского университета. 1969. 695 с.