ISSN: 2658–5782

Номер 2

2024

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 19 (2024), №, 2, с. 44–48

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2024.2.007
DOI: 10.21662/mfs2024.2.007
УДК / UDC: 517.958:533.7

Получена / Received: 24.02.2024
Принята / Accepted: 2.04.2024

# Преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики

**А.В. Борисов, С.В. Хабиров**

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: habirov@anrb.ru

Объектом исследования в настоящей работе являются уравнения газовой динамики с произвольным уравнением состояния (удельная внутренняя энергия как функция удельного объема и энтропии). Требуется найти преобразования эквивалентности не изменяющих систему уравнений, но меняющих лишь уравнение состояния. Операторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности находятся из критерия инвариантности. Интегрируется переопределенная система уравнений на координаты оператора. Получена бесконечная алгебра Ли с двумя произвольными функциями.

**Ключевые слова:** групповой анализ, преобразование эквивалентности, уравнения газовой динамики, однопараметрическая группа, алгебра Ли, условие инвариантности

# Equivalence transformations for equations of gas dynamics

**A.V. Borisov, S.V. Habirov**

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: habirov@anrb.ru

The object of research in this paper is the equations of gas dynamics with an arbitrary equation of state (specific internal energy as a function of specific volume and entropy). It is required to find equivalence transformations that do not change the system of equations, but only change the equation of state. Operators of one-parameter groups of equivalence transformations are found from the invariance criterion. The redefined system of equations is integrated onto the coordinates of the operator. An infinite Lie algebra with two arbitrary functions is obtained.

**Keywords:** group analysis, equivalence transformation, equations of gas dynamics, one-parameter group, Lie algebra, invariance condition

## 1. Введение

Основной задачей группового анализа является групповая классификация уравнений с произвольным элементом, а именно, нахождение произвольных элементов, когда допускаемая группа расширяется [1]. При этом произвольный элемент определяется с точностью до преобразований эквивалентности не изменяющих вид уравнений, но меняющих лишь произвольный элемент. Для уравнений газовой динамики задача решена в работе [2], где уравнение состояния (произвольный элемент) взято в виде некоторой функции давления и плотности. В этом случае преобразование эквивалентности есть трехпараметрическая группа [2]. Наиболее общее уравнение состояния задается равенством $\varepsilon = \varepsilon(V, S)$, где $\varepsilon$ — удельная внутренняя энергия; $V$ — удельный объем; $S$ — энтропия [3, 4].

Уравнения газовой динамики записываются в виде:

$$V_t + \vec{u} \cdot \nabla V = V \nabla \cdot \vec{u}, \tag{1}$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = V(\varepsilon_{VS} \nabla S + \varepsilon_{VV} \nabla V), \tag{2}$$

$$S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \tag{3}$$

Здесь $\vec{u}$ — скорость частицы; $t$ — время; $\vec{x}$ — положение частицы; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — вектор градиента. Плотность, давление и температура вычисляются по формулам $\rho = V^{-1}$, $p = -\varepsilon_V$, $T = \varepsilon_S$. Функция, задающая уравнение состояния, удовлетворяет равенствам

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{x^k} = \varepsilon_{u^k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Преобразования всех переменных, входящих в систему уравнений (1)–(4), сохраняющих вид системы, но изменяющих функцию $\varepsilon(V, S)$, называются преобразованием эквивалентности. Мы разыскиваем преобразования эквивалентности, образующие однопараметрическую группу [5]. Однопараметрическим группам соответствуют операторы дифференцирования первого порядка, которые образуют алгебру Ли. Операторы преобразований эквивалентности имеют вид [5, 6]:

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_V + \eta^S \partial_S + \eta^\varepsilon \partial_\varepsilon,$$

где $\xi^t, \vec{\xi}, \vec{\eta}, \eta^V, \eta^S$ — функции от переменных $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S$, а $\eta^\varepsilon$ — от $t, \vec{x}, \vec{u}, V, S, \varepsilon$.

Оператор $X$ продолжается на производные, входящие в уравнение [5]:

$$
\begin{gathered}
\tilde{X} = X + (\tilde{D}_t\eta^k - u_t^k\tilde{D}_t\xi^t - u_j^k\tilde{D}_t\xi^j)\partial_{u_t^k} + \\
+(\tilde{D}_i\eta^k - u_t^k\tilde{D}_i\xi^t - u_j^k\tilde{D}_i\xi^j)\partial_{u_i^k} + \\
+(\tilde{D}_t\eta^V - V_t\tilde{D}_t\xi^t - V_j\tilde{D}_t\xi^j)\partial_{V_t} + \\
+(\tilde{D}_i\eta^V - V_t\tilde{D}_i\xi^t - V_j\tilde{D}_i\xi^j)\partial_{V_i} + \\
+(\tilde{D}_t\eta^S - S_t\tilde{D}_t\xi^t - S_j\tilde{D}_t\xi^j)\partial_{S_t} + \\
+(\tilde{D}_i\eta^S - S_t\tilde{D}_i\xi^t - S_j\tilde{D}_i\xi^j)\partial_{S_i} + \\
+(D_t\eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_t\eta^V - \varepsilon_S D_t\eta^S)\partial_{\varepsilon_t} + \\
+(D_k\eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_k\eta^V - \varepsilon_S D_k\eta^S)\partial_{\varepsilon_k} + \\
+(D_{u^k}\eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_{u^k}\eta^V - \varepsilon_S D_{u^k}\eta^S)\partial_{\varepsilon_{u^k}} + \\
+\zeta^V\partial_{\varepsilon_V} + \zeta^{VV}\partial_{\varepsilon_{VV}} + \zeta^{VS}\partial_{\varepsilon_{VS}},
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\zeta^V = D_V\eta^\varepsilon - \varepsilon_V D_V\eta^V - \varepsilon_S D_V\eta^S, \\
\zeta^{VV} = D_V\zeta^V - \varepsilon_{VV} D_V\eta^V - \varepsilon_{VS} D_V\eta^S, \\
\zeta^{VS} = D_S\zeta^V - \varepsilon_{VV} D_S\eta^V - \varepsilon_{VS} D_S\eta^S, \\
D_t = \partial_t, \quad D_k = \partial_k, \quad D_{u^k} = \partial_{u^k}, \\
D_V = \partial_V + \varepsilon_V\partial_\varepsilon + \varepsilon_{VV}\partial_{\varepsilon_V} + \varepsilon_{VS}\partial_{\varepsilon_S}, \\
D_S = \partial_S + \varepsilon_S\partial_\varepsilon + \varepsilon_{VS}\partial_{\varepsilon_V} + \varepsilon_{SS}\partial_{\varepsilon_S}, \\
\tilde{D}_t = \partial_t + u_t^k\partial_{u^k} + V_t\partial_V + S_t\partial_S, \\
\tilde{D}_k = \partial_k + u_k^l\partial_{u^l} + V_k\partial_V + S_k\partial_S.
\end{gathered}
$$

Координаты оператора $X$ разыскиваются из условий инвариантности. На каждое уравнение системы (1)–(4) действуем продолженным оператором в силу уравнений системы. В результате получаются уравнения, в которые входят некоторые производные в качестве свободных переменных. Приравнивая нулю коэффициенты при свободных переменных, получаем переопределенную систему уравнений на координаты оператора $X$.

## 2. Условие инвариантности уравнения (3)

Действуем на уравнение (3) оператором $\tilde{X}$:

$$
\begin{gathered}
0 = \tilde{D}_t\eta^S - S_t\tilde{D}_t\xi^t - \nabla S\cdot\tilde{D}_t\vec{\xi} + \vec{\eta}\cdot\nabla S + \\
+u^k\left(\tilde{D}_k\eta^S - S_t\tilde{D}_k\xi^t - \nabla S\cdot\tilde{D}_k\vec{\xi}\right) = \eta_t^S + \\
+\vec{u}\cdot\nabla\eta^S + \eta_{u^k}^S V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right) + \eta_V^S V\nabla\cdot\vec{u} + \\
+\vec{u}\cdot\nabla S\Big(\xi_t^t + \vec{u}\cdot\nabla\xi^t + \xi_{u^k}^t V\left(\varepsilon_{VS}S_K + \varepsilon_{VV}V_K\right) + \\
+\xi_V^t V\nabla\cdot\vec{u}\Big) + \nabla S\cdot\left(\vec{\eta} - \vec{\xi}_t - (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{\xi} - \right. \\
\left. -\vec{\xi}_{u^k}V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right) - \vec{\xi}_V V\nabla\cdot\vec{u}\right).
\end{gathered}
$$

Соберем квадратичные слагаемые по свободным производным $\nabla\cdot\vec{u}$:

$$
\left(\xi_V^t\vec{u} - \vec{\xi}_V\right)\cdot\nabla S = 0.
$$

Отсюда получим равенство

$$
\vec{u}\xi_V^t = \vec{\xi}_V. \tag{5}
$$

Выпишем оставшиеся квадратичные слагаемые

$$
\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right)\left(\xi_{u^k}^t\vec{u} - \vec{\xi}_{u^k}\right)\cdot\nabla S = 0.
$$

Отсюда получим равенство

$$
\xi_{u^k}^t\vec{u} = \vec{\xi}_{u^k}. \tag{6}
$$

Предположили, что $\varepsilon_{VS}$ и $\varepsilon_{VV}$ не равны нулю одновременно. Если это не так, то уравнения (1)–(2) интегрируются в лагранжевых координатах.

Линейные слагаемые по производным дают:

$$
\eta_V^S = 0, \;\; \varepsilon_{VV}\eta_{u^k}^S = 0, \tag{7}
$$

$$
\begin{gathered}
\eta^k = \xi_t^k + (\vec{u}\cdot\nabla)\xi^k - \\
-u^k\left(\xi_t^t + (\vec{u}\cdot\nabla)\xi^t\right) - V\varepsilon_{VS}\eta_{u^k}^S.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Остается уравнение

$$
\eta_t^S + \vec{u}\cdot\nabla\eta^S = 0. \tag{9}
$$

## 3. Условие инвариантности уравнения (1)

Действуем на уравнение (1) оператором $\tilde{X}$:

$$
\begin{gathered}
0 = \tilde{D}_t\eta^V - V_t\tilde{D}_t\xi^t - \nabla V\cdot\tilde{D}_t\vec{\xi} + \vec{\eta}\cdot\nabla V + \\
+u^k\left(\tilde{D}_k\eta^V - V_t\tilde{D}_k\xi^t - \nabla V\cdot\tilde{D}_k\vec{\xi}\right) - \eta^V\nabla\cdot\vec{u} - \\
-V\left(\tilde{D}_k\eta^k - u_t^k\tilde{D}_k\xi^t - u_j^k\tilde{D}_k\xi^j\right) = \\
= \eta_t^V + \vec{u}\cdot\nabla\eta^V + \\
+\eta_{u^k}^V V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right) + \eta_V^V V\nabla\cdot\vec{u} - \eta^V\nabla\cdot\vec{u} - \\
-\left(V\nabla\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\nabla V\right)\left(\xi_t^t + \vec{u}\cdot\nabla\xi^t + \right. \\
\xi_{u^k}^t V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right) + \\
\left.+\xi_V^t V\nabla\cdot\vec{u}\right) + V\left(-u^j u_j^k + V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right)\right)\times \\
\times\left(\xi_k^t + \xi_{u^j}^t u_k^j + \xi_V^t V_k + \xi_S^t S_k\right) + \\
+\nabla V\cdot\left(\vec{\eta} - \vec{\xi}_t - (\vec{u}\cdot\nabla)\,\vec{\xi} - \right. \\
\left. -\vec{\xi}_{u^j}V\left(\varepsilon_{VS}S_k + \varepsilon_{VV}V_k\right) - \vec{\xi}_V V\nabla\cdot\vec{u}\right) - \\
-V\left(\eta_k^k + \eta_{u^j}^k u_k^j + \eta_V^k V_k + \eta_S^k S_k - \right. \\
\left. -u_j^k\left(\xi_k^j + \xi_{u^l}^j u_k^l + \xi_V^j V_k + \xi_S^j S_k\right)\right).
\end{gathered}
$$

Квадратичные слагаемые по производным $\vec{u}$ в силу (5) и (6) дают

$$
\xi_V^t = \vec{\xi}_V = 0.
$$

Квадратные слагаемые, содержащие производные $\vec{u}$, расщепляем по $S_k$ и $V_k$:

$$V_k : \varepsilon_{VV}\left(\xi^t_{u^j}u^j_k - \xi^t_{u^k}\nabla\cdot\vec{u}\right) = 0 \implies \varepsilon_{VV}\xi^t_{u^k} = 0.$$
$$S_k :\ V\varepsilon_{VS}\left(\xi^t_{u^j}u^j_k - \xi^t_{u^k}\nabla\cdot\vec{u}\right) = \vec{u}\cdot\nabla u^k\xi^t_S - $$
$$-u^k_j\xi^j_S = 0 \implies \varepsilon_{VS}\xi^t_{u^k} = 0.$$

Следовательно,

$$\xi^t_{u^k} = \vec{\xi}_{u^k} = 0.$$

Остаются слагаемые

$$u^k_j\xi^j_S = \xi^t_S u^j u^k_j \implies \xi^j_S = u^j\xi^t_S.$$

Отсюда получаем

$$\xi^t_S = \vec{\xi}_S = 0.$$

Таким образом, $\xi^t(t,\vec{x})$, $\vec{\xi}(t,\vec{x})$.

Линейные слагаемые по производным, содержащие $u^k_j$:

$$\left(\eta^V_V - V^{-1}\eta^V - \xi^t_t - \vec{u}\cdot\nabla\xi^t\right)\nabla\cdot\vec{u} =$$
$$= u^j_k\left(\eta^k_{u^j} + u^k\xi^t_j - \xi^k_j\right).$$

Расщепление по $u^k_j$ даёт:

$$j \neq k :\quad \eta^k_{u^j} = \xi^k_j - u^k\xi^t_j, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} j = k :\ &\eta^V_V - V^{-1}\eta^V - \xi^t_t - \vec{u}\cdot\nabla\xi^t = \\ &= \eta^1_{u^1} + u^1\xi^t_1 - \xi^1_1 = \eta^2_{u^2} + u^2\xi^t_2 - \xi^2_2 = \\ &= \eta^3_{u^3} + u^3\xi^t_3 - \xi^3_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Слагаемые с производными $S_k, V_k$ дают уравнения:

$$\eta^k_S = \varepsilon_{VS}(\eta^V_{u^k} + V\xi^t_k), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \eta^k = &-(\xi^t_l u^l + \xi^t_t)u^k + u^l\xi^k_l + \xi^k_t + \\ &+V\eta^k_V - V\varepsilon_{VV}(\eta^V_{u^k} + V\xi^t_k). \end{aligned} \tag{13}$$

Остаются слагаемые без производных

$$\eta^V_t + u^k\eta^V_k = V\eta^k_k. \tag{14}$$

## 4. Условие инвариантности уравнения (2)

Действуем на уравнение (2) оператором $\tilde{X}$:

$$\begin{aligned} 0 = &\tilde{D}_t\eta^k - u^k_t\tilde{D}_t\xi^t - u^k_j\tilde{D}_t\xi^j + \\ &+u^l(\tilde{D}_l\eta^k - u^k_t\tilde{D}_l\xi^t - u^k_j\tilde{D}_l\xi^j) + \\ &+(\vec{\eta}\cdot\nabla)u^k - \eta^V(\varepsilon_{VV}V_k + \varepsilon_{VS}S_k) - \\ &-V\varepsilon_{VV}\left(\tilde{D}_k\eta^V - V_t\tilde{D}_k\xi^t - V_j\tilde{D}_k\xi^j\right) - \\ &-V\varepsilon_{VS}\left(\tilde{D}_k\eta^S - S_t\tilde{D}_k\xi^t - S_j\tilde{D}_k\xi^j\right) - \\ &-VV_k\zeta^{VV} - VS_k\zeta^{VS}. \end{aligned}$$

Собирая слагаемые для каждой координаты оператора $\tilde{X}$ и используя полученные выражения для $\xi^t$, $\vec{\xi}$, получим:

$$\begin{aligned} 0 = &\eta^k_t + \vec{u}\cdot\nabla\eta^k + \eta^k_{u^j}V\left(\varepsilon_{VV}V_j + \varepsilon_{VS}S_j\right) + \\ &+\eta^k_V V\nabla\cdot\vec{u} + \eta^l u^k_l - \left(\xi^t_t + \vec{u}\cdot\nabla\xi^t\right)\times \\ &\times\left(-u^l u^k_l + V\left(\varepsilon_{VV}V_k + \varepsilon_{VS}S_k\right)\right) + \\ &+\xi^t_k V(\varepsilon_{VV}\left(-\vec{u}\cdot\nabla V + V\nabla\cdot\vec{u}\right) - \varepsilon_{VS}\vec{u}\cdot\nabla S) - \\ &-u^k_j(\xi^j_t + \vec{u}\cdot\nabla\xi^j) + V(\varepsilon_{VV}V_j + \varepsilon_{VS}S_j)\xi^j_k - \\ &-\eta^V\left(\varepsilon_{VV}V_k + \varepsilon_{VS}S_k\right) - \\ &-V\varepsilon_{VV}\left(\eta^V_k + \eta^V_{u^l}u^l_k + \eta^V_V V_k + \eta^V_S S_k\right) - \\ &-V\varepsilon_{VS}\left(\eta^S_k + \eta^S_S S_k + \eta^S_{u^l}u^l_k\right) - \\ &-VV_k\left(D^2_V\eta^\varepsilon - 2\varepsilon_{VV}\eta^V_V - \varepsilon_V\eta^V_{VV}\right) - \\ &-VS_k\left(D_S D_V\eta^\varepsilon - \varepsilon_{VS}\eta^V_V - \varepsilon_V\eta^V_{VS} - \varepsilon_{VV}\eta^V_S - \varepsilon_{VS}\eta^S_S\right). \end{aligned}$$

Слагаемые с производными функции $\vec{u}$, учитывая (8), дают равенство

$$\begin{aligned} &(V\varepsilon_{VS})_V\eta^S_{u^k}\nabla\cdot\vec{u} + \varepsilon_{VS}\eta^S_{u^l}\left(u^k_l + u^l_k\right) + \\ &+\varepsilon_{VV}\eta^V_{u^l}u^l_k = \xi^t_k V\varepsilon_{VV}\nabla\cdot\vec{u}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, учитывая (7):

$$\eta^S_{u^l} = 0,\ \varepsilon_{VV}\eta^V_{u^l} = 0,\ \varepsilon_{VV}\xi^t_k = 0\ \Rightarrow\ \vec{\eta}_V = 0. \tag{15}$$

Слагаемые с $V_j$ и $S_j$, учитывая (8) и полученные соотношения, дают равенства:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{VV}(\xi^k_j + \xi^j_k - 2\xi^t_t\delta^k_j) = \delta^k_j D^2_V\eta^\varepsilon + \\ &+(-\eta^V_V + V^{-1}\eta^V)\varepsilon_{VV}\delta^k_j - \delta^k_j\varepsilon_V\eta^V_{VV}. \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{VS}\left(\xi^k_j + \xi^j_k - 2(\xi^t_t + \vec{u}\cdot\nabla\xi^t)\delta^k_j - \right. \\ &\left.-u^k\xi^t_j - u^j\xi^t_k\right) = \delta^k_j(D_S D_V\eta^\varepsilon - \varepsilon_V\eta^V_{VS}). \end{aligned} \tag{17}$$

Останутся следующие слагаемые:

$$\eta^k_t + \vec{u}\cdot\nabla\eta^k = V\varepsilon_{VV}\eta^V_k + V\varepsilon_{VS}\eta^S_k. \tag{18}$$

Из равенств (16) и (17) при $k \neq j$ следует, учитывая (15):

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{VV}\left(\xi^k_j + \xi^j_k\right) = 0, \\ &\varepsilon_{VS}\left(\xi^k_j + \xi^j_k - u^k\xi^t_j - u^j\xi^t_k\right) = 0 \implies \xi^t_k = 0, \\ &\xi^k_j + \xi^j_k = 0, \qquad j \neq k. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (8), (11), (12) в силу (15) следует:

$$\vec{\eta} = \vec{\xi}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{\xi} - \vec{u}\xi^t_t,$$
$$\eta^V_V = V^{-1}\eta^V \implies \eta^V = V\overline{\eta}(t,\vec{x},S),$$

при этом (10) и (13) тождественно выполнены.

Из (16) и (17) при $k = j$ получим:

$$D_V^2 \eta^\varepsilon + 2\varepsilon_{VV} \xi_t^t = 2\varepsilon_{VV} n,$$
$$\xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 = n(t, \vec{x}), \tag{20}$$
$$D_S D_V \eta^\varepsilon + 2\varepsilon_{VS} \xi_t^t = \varepsilon_V \bar{\eta}_S + 2\varepsilon_{VS} n.$$

Из (9) следует в силу (15)

$$\eta_t^S = \eta_k^S = 0 \implies \eta^S = \eta(S).$$

Из (14) следует

$$\bar{\eta}_t + \vec{u} \cdot \nabla \bar{\eta} = 3n_t + 3\vec{u} \cdot \nabla n \implies \bar{\eta} = 3n + \alpha(S).$$

Из (18) следует:

$$\xi_{tt}^k + 2(\vec{u} \cdot \nabla)\xi_t^k - u^k \xi_{tt}^t + u^l u^j \xi_{lj}^k = V^2 \varepsilon_{VV} 3n_k,$$
$$\xi_{t2}^1 = \xi_{t3}^1 = \xi_{t1}^2 = \xi_{t3}^2 = \xi_{t1}^3 = \xi_{t2}^3 = 0,$$
$$\xi_{lj}^k = 0, \quad n_k = 0, \quad \xi_{tt}^k = 0, \quad \xi_{tt}^t = 2n_t.$$

Отсюда в силу (19), (20):

$$\xi^k = \omega_j^k(t) x^j + a^k(t), \ \omega_j^k + \omega_k^j = 0 \ (j \neq k),$$
$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = n(t),$$
$$a^k = A^k t + A_0^k, \ \omega_j^{k\prime\prime} = 0,$$
$$n'' = 0, \ \omega_j^k = \Omega_j^k, \ \Omega_j^k + \Omega_k^j = 0, \ n = Nt + N_0,$$
$$\xi_{ttt}^t = 0 \implies \xi^t = Nt^2 + Bt + B_0,$$
$$\vec{\xi} = \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{A}t + \vec{A}_0 + (Nt + N_0)\vec{x},$$
$$\vec{\eta} = N\vec{x} + \vec{A} + \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{u}(-Nt + N_0 - B),$$
$$\eta^S = \eta(S), \ \eta^V = V(3Nt + 3N_0 + \alpha(S)),$$

Большими буквами обозначены произвольные постоянные.

Равенство (20) интегрируется по $V$:

$$\eta^\varepsilon = 2\varepsilon(N_0 - B - Nt) + V\mu(S, \vec{u}, t, \vec{x}) + \nu(S, \vec{u}, t, \vec{x}), \quad \mu_S = \varepsilon_V \alpha_S. \tag{21}$$

## 5. Условие инвариантности уравнения (4)

Действуем оператором $\tilde{X}$ на уравнения (4) в силу (21):

$$D_k \eta^\varepsilon = 0, \ D_{u^k} \eta^\varepsilon = 0, \ D_t \eta^\varepsilon = \varepsilon_V 3NV.$$

Отсюда следует:

$$\mu_k = \nu_k = 0, \ \mu_{u^k} = \nu_{u^k} = 0,$$
$$V\mu_t + \nu_t = N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon),$$
$$\mu_{St} = 0 \implies \mu = \varphi(S) + \psi(t),$$
$$\varphi' = \varepsilon_V \alpha', \quad \psi'' = 0, \quad \nu_{tt} = 0,$$
$$\psi = \Psi_1 t + \Psi_0, \quad \nu = \nu_1(S)t + \nu_0(S),$$
$$V\Psi_1 + \nu_1(S) = N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon).$$

Значит

$$\eta^\varepsilon = 2\varepsilon(N_0 - B - Nt) + V(\varphi(S) + \Psi_1 t + \Psi_0) + \nu_1(S)t + \nu_0(S), \ \varphi' = \alpha' \varepsilon_V,$$
$$V\Psi_1 + \nu_1(S) = N(3V\varepsilon_V + 2\varepsilon).$$

Если $\varepsilon(V, S)$ — произвольная, то $\varphi' = \alpha' = 0 \Longrightarrow \varphi = \Phi$, $\alpha = E$, постоянные $N = 0$, $\Psi_1 = 0$, $\nu_1(S) = 0$,

$$\xi^t = Bt + B_0, \ \vec{\xi} = \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{A}t + \vec{A}_0 + N_0 \vec{x},$$
$$\vec{\eta} = \vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{u}(N_0 - B) + \vec{A},$$
$$\eta^S = \eta(S), \ \eta^V = V(3N_0 + E),$$
$$\eta^\varepsilon = 2\varepsilon(N_0 - B) + V(\Phi + \Psi_0) + \nu(S).$$

Здесь $B$, $B_0$, $\vec{A}$, $\vec{A}_0$, $N_0$, $E$, $\vec{\Omega}$, $\Phi + \Psi_0$ — произвольные постоянные; $\eta(S)$, $\nu(S)$ — произвольные функции.

Если один произвольный элемент не равен нулю, а остальные обнулить, то получим базисные операторы алгебры Ли $L$:

$$A_0^k, k = 1,2,3 : \partial_{\vec{x}} = \{X_1, X_2, X_3\},$$
$$A^k, k = 1,2,3 : t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}} = \{X_4, X_5, X_6\},$$
$$\vec{\Omega} : \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}} = \{X_7, X_8, X_9\},$$
$$B_0 : \partial_t = X_{10}, B + N_0 - 3E : t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} = X_{11},$$
$$N_0 - 3E : \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 2\varepsilon\partial_\varepsilon = X_{12},$$
$$E : V\partial_V = X_{13}; \Phi + \Psi_0 : V\partial_\varepsilon = X_{14},$$
$$\eta(S) : \eta(S)\partial_S = \langle\eta\rangle_1; \nu(S) : \nu(S)\partial_\varepsilon = \langle\nu\rangle_2.$$

Алгебра Ли $L$ раскладывается в полупрямую сумму $L = L_{11} \oplus L_\infty$ идеала $L_{11} = \{X_1, ..., X_{11}\}$ и бесконечной подалгебры $L_\infty = \{X_{12}, X_{13}, X_{14}, \langle\eta\rangle_1, \langle\nu\rangle_2\}$. Преобразования алгебры $L_{11}$ не преобразуют уравнение состояния, значит $L_{11}$ допускается уравнениями газовой динамики с любым уравнением состояния. Это ядро допускаемых алгебр [2].

## 6. Заключение

Вычислены операторы однопараметрических групп преобразований эквивалентности для уравнений газовой динамики с уравнением состояния в виде произвольной функции удельной внутренней энергии, зависящей от удельного объема и энтропии. Получена бесконечная алгебра Ли с двумя произвольными функциями. Конечномерная часть этой алгебры 14-мерна.

## Список литературы / References

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 239 с.
Ovsyannikov L.V. [Group property of differential equations] *Gryppovye svojstva differencialnix uravnenij*. Novosibirsk: Izd-vo Sib. otd-niya AN SSSR, 1962. P. 239 (in Ruassian).

[2] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
Ovsyannikov L.V. [Program SUBMODELS. Gas dynamics] *Programma PODMODELI. Gazovaya dinamika* // PMM. 1994. V. 58, no. 4. Pp. 30–55 (in Ruassian).

[3] Хабиров С.В. Лекции аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ, 2013. 224 с.
Habirov S.V. [Lectures Analytical methods in gas dynamics] *Lekcii analiticheskie metody v gazovoj dinamike*. Ufa: BGU, 2013. P. 224 (in Russian).

[4] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики: учеб. пособие для студентов механико–мат. специальностей ун-тов. Изд. 2-е, доп. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
Ovsyannikov L.V. [Lectures on the fundamentals of gas dynamics: a textbook for students of mechanical and mathematical specialties at universities. Ed. 2nd, add.] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki: uchebnoye posobiye dlya studentov mekhaniko–matem. spetsial'nostey univ-tov. Izd. 2-ye, dop.*. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternyx issledovaniy, 2003. P. 336 (in Russian).

[5] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012, 659 с.
Chirkunov Yu.A., Habirov S.V. [Elements of the symmetric analysis of differential equations of continuum mechanics] *Elementi simmetriinogo analiza differencialnix uravnenij mehaniki sploshnoi sredy*. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2012. P. 659 (in Russian).

[6] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
Ibragimov N.H. [Transformation groups in mathematical physics] *Gryppy preobrazovanij v matematicheskoj fizike*. Moscow: Nauka, 1983. P. 280 (in Russian).

## Сведения об авторах / Information about the Authors

**Артем Вячеславович Борисов**
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

**Artyom V. Borisov**
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

**Салават Валеевич Хабиров**
д.ф.-м.н., профессор
Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

**Salavat V. Khabirov**
Sc.D. (physics & mathematics), Prof.
Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia
habirov@anrb.ru
ORCID: 0000-0002-6126-9033