ISSN: 2658–5782

Номер 1

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 **20** (2025) 1: 20–25

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2025.1.004
DOI 10.21662/mfs2025.1.004
УДК / UDC 517.958:533.7

Получена / Received 27.01.2025
Принята / Accepted 20.03.2025

Автомодельное движение газа с линейным полем скоростей

С.В. Хабиров
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: habirov@anrb.ru

Уравнения движения идеального газа допускают равномерное растяжение всех независимых переменных. Этой группе соответствует инвариантная стационарная подмодель ранга 3. Получены все автомодельные решения подмодели с линейным полем скоростей. Возможны движения частиц по квазилучам, плоским степенным и спиральным траекториям, пространственным спиральным траекториям на поверхности вращения степенной кривой.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, равномерное растяжение, инвариантная автомодельная подмодель, линейное поле скоростей, квазилуч

Работа выполнена в рамках государственного задания №Ё124030400064-2 (FMRS-2024-0001).

Automdeling gas motiones with the linear field of velocities

S.V. Khabirov
Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: habirov@anrb.ru

The equations of a motione of the ideal gas admit the proportional dilatation by all independent variables. The invariant stationary submodel of the rank 3 corresponds to this group. All automodeling solutions of the submodel with the linear field of velocities are obtainted. It is possible motiones of particales along quasiraies, on the plane exponential and spiral trajectories, by twisted curves on the rotation surface of the exponential curve.

Keywords: equations of gas dynamics, proportional dilatation, invariant automodeling submodel, linear field of velocities, quasiray

1. Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики дает большое число подмоделей: инвариантные, частично инвариантные, дифференциально инвариантные [1–4] для неподобных подгрупп 11-параметрической группы Галилея, расширенной растяжением. Некоторые инвариантные подмодели хорошо изучены [5–7], другие ждут своей очереди для исследования по аналогии с первыми. К типу дифференциально инвариантных подмоделей относятся решения с линейным полем скоростей, так как множество первых производных по координатам инвариантно относительно группы Галилея. Для модели газовой динамики эта дифференциально инвариантная подмодель задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка. Она наследует допускаемую группу и поэтому имеет интегралы [8], но общее решение получить не представляется возможным. Решение с линейным полем скоростей имеет смысл искать для подмоделей. Так получены периодические движения газа [9, 10]. Краткий обзор работ о движении сплошной среды с линейным полем скоростей приведен в работе [11]. В качестве примера получения общего решения с линейным полем скоростей рассмотрена автомодельная инвариантная подмодель ранга 3 для группы растяжений. Эти точные решения дополняют классы инвариантных и частично инвариантных решений этой подмодели, рассмотренных в работах [12–14].

В настоящей работе найдены все автомодельные решения с линейным полем скоростей с постоянной матрицей, которая эквивалентна двум жордановым формам. В зависимости от собственных чисел этих матриц получены движения частиц газа для специальных уравнений состояния.

2. Подмодель автомодельных движений газа

Уравнения газовой динамики записываются в виде [5–7]:

$$
\begin{gathered}
DS = S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0, \\
D\vec{u} = V(\epsilon_{VS} \nabla S + \epsilon_{VV} \nabla V) = -V \nabla p, \\
p = -\epsilon_V = P(V, S), \\
DV = V \nabla \cdot \vec{u}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь S — энтропия; V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность); p — давление; $\vec{u}$ — скорость частицы; ϵ — удельная внутренняя энергия; $\epsilon = \epsilon(V, S)$ — уравнение состояния; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент; t — время.

Система дифференциальных уравнений (1) допускает 11-и параметрическую группу Галилея расширенную равномерным растяжением [8]. Ей соответствует 11-и мерная алгебра Ли. Все подгруппы (подалгебры) перечислены в [1]. Число неподобных однопараметрических подгрупп равно 13, среди которых есть подгруппа равномерных растяжений. Оператор этой подгруппы $X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}$ имеет инварианты $\vec{x}_1 = t^{-1}\vec{x}$, $\vec{u}_1 = \vec{u} - t^{-1}\vec{x}$, V, S. Представление инвариантного решения ранга 3 имеет вид: $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{u}_1$, $V = V_1$, $S = S_1$, где $\vec{u}_1$, V_1, S_1 — функции инвариантов $\vec{x}_1$. Подстановка представления в систему (1) дает автомодельную подмодель стационарного типа [1]:

$$
\begin{gathered}
D_1 S_1 = \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} S_1 = 0, \\
D_1 \vec{u}_1 + V_1 \partial_{\vec{x}_1} p = -\vec{u}_1, \\
D_1 V_1 - V_1 \partial_{\vec{x}_1} \cdot \vec{u}_1 = 3V_1.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Линия уровня инвариантов $\vec{x}_1$ — прямая, выходящая из начала координат. Это частица инвариантной подмодели, на которой постоянны инвариантные функции. Нормализатор подалгебры X_{11} — семимерен. Это наибольшая подалгебра из L_{11}, для которой X_{11} — идеал. Он состоит из операторов галилеевых преобразований, вращений и растяжения. Фактор нормализатора по X_{11} — подалгебра группы Евклида (переносы и вращения) $\{\partial_{\vec{x}_1}, \vec{x}_1 \times \partial_{\vec{x}_1} + \vec{u}_1 \times \partial_{\vec{u}_1}\}$. Эта группа допускается подмоделью (2) [1, 5]. Подмодель допускает преобразования эквивалентности с операторами $\vec{x}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} + \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{u}_1} + V_1 \partial_{V_1} + S_1 \partial_{S_1}$, $V_1 \partial_{V_1}$, $\gamma(S_1)\partial_{S_1}$, $\partial_p - V_1 \partial_\epsilon$, $\nu(S_1)\partial_\epsilon$, где $\gamma(S_1)$, $\nu(S_1)$ — произвольные функции. Уравнения состояния следует рассматривать с точностью до этих преобразований.

3. Линейное поле скоростей

Рассмотрим решение автомодельной подмодели (2) с линейным полем скоростей $\vec{u}_1 = A\vec{x}_1 + \vec{a}$, где A — невырожденная матрица ($|A| \neq 0$). Вырожденный случай рассматривается далее. Евклидова группа преобразований переводит представление решения в более простое с $\vec{a} = 0$, $A = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3) + E < \vec{\omega} >$, $E < \vec{\omega} > \vec{x}_1 = \vec{\omega} \times \vec{x}_1$. Подмодель принимает вид:

$$
\begin{gathered}
p = -\epsilon_{V_1} = P(V_1, S_1), \\
D_1 S_1 = \vec{u}_1 \cdot \partial_{\vec{x}_1} S_1 = 0, \\
\partial_{\vec{x}_1} p = -V_1^{-1}(A^2 + A)\vec{x}_1, \\
D_1 V_1 = V_1(u_{1x_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1} + 3).
\end{gathered} \tag{3}
$$

Собственные числа матрицы A удовлетворяют кубическому уравнению

$$
\lambda^3 = \lambda^2 \mathrm{tr} A - \lambda \mathrm{tr} A_D + |A|,
$$

$$
\mathrm{tr} A = d_1 + d_2 + d_3,
$$

$$
\mathrm{tr} A_D = \begin{vmatrix} d_1 & -\omega_3 \\ \omega_3 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & \omega_2 \\ -\omega_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_2 & -\omega_1 \\ \omega_1 & d_3 \end{vmatrix},
$$

$$
|A| = d_1 d_2 d_3 - \omega_1^2 d_1 - \omega_2^2 d_2 - \omega_3^2 d_3.
$$

Существует действительный корень λ, которому отвечает собственный вектор $\vec{e}_1 : A\vec{e}_1 = \lambda \vec{e}_1$. В ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матрица A имеет вид $\left\| \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \omega \\ 0 & -\omega & d_3 \end{matrix} \right\|$, при этом вид уравнений (3) не изменится. Поворот в плоскости векторов $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не меняет вид уравнений (3), но изменит матрицу A:

$$
\left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} d_2 & \omega \\ -\omega & d_3 \end{matrix} \right\| =
$$

$$
= \left\| \begin{matrix} \bar{d}_2 & \bar{\omega} \\ -\bar{\omega} & \bar{d}_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix} \right\|.
$$

Отсюда следуют равенства:

$$
\begin{gathered}
\bar{d}_2 + \bar{d}_3 = d_2 + d_3, \\
\bar{d}_2 = d_2 \cos^2\varphi + d_3 \sin^2\varphi, \\
\bar{\omega} = \omega + (d_3 - d_2)\sin\varphi\cos\varphi.
\end{gathered}
$$

Если $d_2 = d_3$, то матрица A не меняется. Если $d_2 \neq d_3$, то выбором φ можно сделать $\bar{\omega} = 0 : 2\omega(d_2 - d_3)^{-1} = \sin(2\varphi)$. Итак, достаточно рассмотреть два случая матриц A:

$$
1) \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{matrix} \right\|, \quad \lambda_i \neq 0;
$$

$$
2) \left\| \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{matrix} \right\|, \quad \lambda \neq 0, \quad b \neq 0.
$$

Первый случай матрицы A с действительными собственными числами, второй — с комплексно сопряженными. Решения рассматриваются с точностью до ортогональных преобразований, допускаемых системой (2). Получаются все жордановы формы в ортогональном базисе.

4. Действительные собственные числа

Система уравнений (3) в первом случае матрицы A принимает вид:

$$p_{x_i} = -V_1^{-1}\lambda_i(\lambda_i+1)x_i,\ u_i = \lambda_i x_i,\\ D_1 S_1 = \lambda_i x_i S_{1x_i} = 0,\\ D_1 V_1 = V_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3). \tag{4}$$

Условия совместности таковы

$$V_{1x_j}\lambda_i(\lambda_i+1)x_i = V_{1x_i}\lambda_j(\lambda_j+1)x_j,\ \ i\neq j. \tag{5}$$

Отсюда следует

$$V_1 = V_1(J), \quad J = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i(\lambda_i+1)x_i^2,$$

если $\lambda_i \neq -1$, $V_1 \neq \text{const}$. Уравнение для V_1 из (4)

$$V_1(\textstyle\sum_{i=1}^3\lambda_i+3) = 2V_1'\sum_{i=1}^3\lambda_i^2(\lambda_i+1)x_i^2 =\\ = 2V_1'(\lambda_3 J + (\lambda_1-\lambda_3)\lambda_1(\lambda_1+1)x_1^2+\\ +(\lambda_2-\lambda_3)\lambda_2(\lambda_2+1)x_2^2)$$

расщепляем по свободным переменным x_1, x_2:

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda\neq-1,\\ V_1 = V_0 I^{\frac{3}{2}(1+\lambda^{-1})},\ \ I = x_1^2+x_2^2+x_3^2,\\ p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{V_0(\lambda+3)}I^{-\frac{\lambda+3}{2\lambda}} + p_0 = P(V_1,S_1) \Rightarrow\\ \Rightarrow S_1 = S(I) = S_0,\ \ \vec{u}_1 = \lambda\vec{x}_1.$$

Здесь V_0, p_0, S_0 — постоянные. Получили изоэнтропическое пространственное радиальное движение частиц $\vec{x} = \vec{x}_0|t|^{\lambda+1}$. Уравнение состояния для такого решения политропно

$$p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{\lambda+3}V_0^{-\frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}}V_1^{-\frac{\lambda+3}{3(\lambda+1)}} + p_0.$$

Для постоянного V_1 уравнения (4) противоречивы.

Если $\lambda_1=-1$, $\lambda_2\neq-1$, $\lambda_3\neq-1$, то условия совместности (5) дают:

$$V_1^{-1} = V'(J),\ \ J = \lambda_2(\lambda_2+1)x_2^2 + \lambda_3(\lambda_3+1)x_3^2,\\ p = -\frac{1}{2}V(J) + p_0 = P(V_1,S_1)\ \Rightarrow\ S_1 = S(J).$$

Из уравнений (4) следует

$$S'(\lambda_2^2(\lambda_2+1)x_2^2 + \lambda_3^2(\lambda_3+1)x_3^2) = 0 \Rightarrow\\ \Rightarrow S_1 = S_0 = \text{const},$$

$$2V''(\lambda_2^2(\lambda_2+1)x_2^2+\lambda_3^2(\lambda_3+1)x_3^2)+\\ +V'(2+\lambda_2+\lambda_3) = 0 \Rightarrow \lambda_2=\lambda_3=\lambda,$$

$$V_1 = V_0 I^{1+\lambda^{-1}},\ \ I = x_2^2+x_3^2,\\ p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{2V_0}I^{-\lambda^{-1}} + p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\lambda^2(\lambda+1)V_0^{\frac{-\lambda}{\lambda+1}}V_1^{\frac{-1}{\lambda+1}},\\ \vec{u}_1 = (-x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

изоэнтропическое двумерное радиальное движение частиц $x = x_0$, $(y,z) = (y_0,z_0)|t|^{\lambda+1}$.

Если $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda=\lambda_3\neq-1$, то условия совместности (5) дают $V_1 = V_1(x_3)$. Из уравнений (4) следует

$$V_1 = V_0|x_3|^{1+\lambda^{-1}},\ S=S_0,\ \vec{u}_1 = (-x_1,-x_2,\lambda x_3),\\ p = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1-\lambda}V_0^{-1}|x_3|^{1-\lambda^{-1}} + p_0 =\\ = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1-\lambda}V_0^{\frac{-2\lambda}{\lambda+1}}V_1^{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}} + p_0.$$

Получено одномерное автомодельное движение.

Если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$, то $p = p_0 = P(V_1,S_1)$, $D_1V_1 = 0 = D_1S_1 \Rightarrow V_1 = V_1\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}\right)$, $\vec{u}_1 = -\vec{x}_1$. Имеем изобарический покой, в котором плотность и энтропия распределены по коническому закону.

5. Комплексно сопряженные собственные числа

Система уравнений (3) во втором случае матрицы A принимает вид:

$$u_1 = \lambda x_1,\ v_1 = ay_1+bz_1,\ w_1 = -by_1+az_1,\\ D_1S_1 = 0,\ D_1V_1 = V_1(\lambda+2a+3),\\ p_{x_1} = -V_1^{-1}\lambda(\lambda+1)x_1,\\ p_{y_1} = -V_1^{-1}((a^2-b^2+a)y_1 + b(2a+1)z_1),\\ p_{z_1} = -V_1^{-1}(-b(2a+1)y_1 + (a^2-b^2+a)z_1). \tag{6}$$

Условия совместности

$$V_{1y_1}\lambda(\lambda+1)x_1 = V_{1x_1}((a^2-b^2+a)y_1+\\ +b(2a+1)z_1),\\ V_{1z_1}\lambda(\lambda+1)x_1 = V_{1x_1}(-b(2a+1)y_1+\\ +(a^2-b^2+a)z_1),\\ V_{1y_1}(b(2a+1)y_1 - (a^2-b^2+a)z_1)+\\ +V_{1z_1}((a^2-b^2+a)y_1 + b(2a+1)z_1) =\\ = 2V_1 b(2a+1) \tag{7}$$

после подстановки первых двух соотношений в третье определяют:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad V_1 = V(I),\\ I = -\lambda(\lambda+1)x_1^2 + (b^2+\frac{1}{4})(y_1^2+z_1^2)$$

при $\lambda\neq-1$. Уравнение для V_1

$$V'((2\lambda+1)\lambda(\lambda+1)x_1^2 + I) + V(\lambda+2) = 0$$

расщепляем по свободной переменной x_1:

$$V'(I)\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1) = 0.$$

Если V_1 — постоянно, то система (6) несовместна. Если $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, то

$$V_1 = V_0 I^{-\frac{3}{2}},\ \ I = \frac{1}{4}x_1^2 + \left(b^2 + \frac{1}{4}\right)(y_1^2 + z_1^2),$$
$$p = \frac{1}{5}V_0^{-1} I^{\frac{5}{2}} + p_0 = \frac{1}{5}V_0^{\frac{2}{3}} V_1^{-\frac{5}{3}} + p_0.$$

Уравнение состояния $p = P(V_1, S_1)$ определяет $S_1 = S_1(I)$. Из (6) следует $S_1 = S_0 = \mathrm{const}$. Получаем изоэнтропическое движение одноатомного газа:

$$u_1 = -\frac{1}{2}x_1,\ v_1 = -\frac{1}{2}y_1 + bz_1,\ w_1 = -by_1 - \frac{1}{2}z_1\ \Rightarrow$$
$$u = \frac{x}{2t},\ \ v = t^{-1}\left(\frac{1}{2}y + bz\right),\ \ w = t^{-1}\left(\frac{1}{2}z - by\right).$$

В цилиндрической системе координат $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ частицы двигаются по закону

$$x = x_0|t|^{1/2},\ \ r = r_0|t|^{1/2},\ \ \varphi = \varphi_0 - b\ln|t|.$$

Траектория движения частицы есть спираль $r = r_0\exp\dfrac{\varphi_0 - \varphi}{2b}$ на конусе $xr^{-1} = x_0 r_0^{-1}$.

Если $\lambda = -1$, то из (7) следует $V_{1x_1} = 0$. Уравнение для V_1 в (6) принимает вид:

$$V_{1y_1}(ay_1 + bz_1) + V_{1z_1}(-by_1 + az_1) = \\ = 2V_1(a+1). \tag{8}$$

Последнее уравнение в (7) в силу (8) таково:

$$(a+1)(V_{1y_1}(by_1 - az_1) + V_{1z_1}(ay_1 + bz_1)) = \\ 2abV_1\ \Rightarrow\ a \neq -1. \tag{9}$$

Уравнения (7), (8) совместны. В полярных координатах $y_1 = r_1\cos\varphi_1$, $z_1 = r_1\sin\varphi_1$ получаем решение:

$$V_1 = V_0 r_1^n e^{-k\varphi_1},\ \ k = \frac{2b(2a+1)}{(a+1)(a^2+b^2)},$$
$$n = \frac{2a((a+1)^2+b^2)}{(a+1)(a^2+b^2)},$$
$$p = \frac{1}{2}V_0^{-1}(a+1)(a^2+b^2) r_1^{2-n} e^{k\varphi_1} + p_0 = \\ = P(V_1, S_1) \Rightarrow S_{1x_1} = 0.$$

Уравнение для S_1 в (6) интегрируем: $S_1 = S(I)$, $I = r_1 e^{ab^{-1}\varphi_1}$. Решение возможно для уравнения состояния вида

$$P(V_1, S_1) = p_0 + \frac{1}{2}(a+1)(a^2+b^2)V_0^{\frac{-a}{a+1}} V_1^{\frac{-1}{a+1}} I^{\frac{bk}{a+1}}.$$

Получаем движение политропного газа с переменной энтропией:

$$u = 0,\ \ v = (a+1)yt^{-1} + bzt^{-1},$$
$$w = -byt^{-1} + (a+1)zt^{-1}.$$

В цилиндрической системе координат частицы двигаются по закону

$$x = x_0,\ \ r = r_0|t|^{a+1},\ \ \varphi = \varphi_0 - b\ln|t|.$$

Это плоское движение по логарифмической спирали

$$r = r_0\exp(b^{-1}(a+1)(\varphi_0 - \varphi)).$$

6. Линейное поле скоростей с вырожденной матрицей

Рассмотрим подмодель (2) с линейным полем скоростей $\vec{u}_1 = A\vec{x}_1 + \vec{a}$ с вырожденной матрицей $|A| = 0$. Постоянная матрица A имеет нулевое собственное значение. Если нулевое собственное значение кратности 3, то матрица A нулевая. Поворотом декартовых осей сделаем $\vec{u}_1 = (a, 0, 0)$. Уравнения (2) интегрируем:

$$S_{1x_1} = 0,\ \ V_1 p_{x_1} = -a,\ \ p_{y_1} = p_{z_1} = 0,$$
$$aV_{1x_1} = 3V_1 \Rightarrow a \neq 0,\ V_1 = V_0\exp(3a^{-1}x_1),$$
$$p = p_0 + \frac{1}{3}a^2 V_0^{-1}\exp(-3a^{-1}x_1) = p_0 + \frac{1}{3}a^2 V_1^{-1} \Rightarrow$$
$$S_1 = S_0 = \mathrm{const}.$$

Получаем изоэнтропическое движение газа с уравнением состояния линейным по плотности:

$$u = a + xt^{-1},\ v = yt^{-1},\ \ w = zt^{-1} \Rightarrow$$
$$y = y_0 t,\ \ z = z_0 t,\ \ x = x_0 t + at\ln|t|.$$

Траектория частицы — квазилуч на полуплоскости

$$\varphi = \varphi_0,\ \ r = r_0 t,\ \ x = \frac{r}{r_0}\left(x_0 + a\ln\frac{r}{r_0}\right)$$

в цилиндрической системе координат $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$.

Если нулевое собственное значение кратности 2, то представление решения поворотом и переносом приводится к виду:

$$u_1 = a,\ \ v_1 = 0,\ \ w_1 = \lambda z_1,\ \ \lambda \neq 0.$$

Система уравнений (2)

$$V_1 p_{x_1} = -a,\ \ p_{y_1} = 0,\ \ V_1 p_{z_1} = -\lambda(\lambda+1)z_1 \Rightarrow$$
$$V_{1y_1} = 0 \quad \text{при} \quad a \neq 0 \quad \text{или} \quad \lambda \neq -1,$$
$$aV_{1z_1} = \lambda(\lambda+1)z_1 V_{1x_1},$$
$$aV_{1x_1} + \lambda z_1 V_{1z_1} = V_1(\lambda+3),$$
$$aS_{1x_1} + \lambda z_1 S_{1z_1} = 0$$

при $a \neq 0, \lambda \neq -1$ противоречива. Если $a = 0, \lambda \neq -1$, то

$$V_1 = V_0|z_1|^{1+3\lambda^{-1}},\ \ S_1 = S_0 = \mathrm{const},$$
$$p = p_0 - V_0^{-1}\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\lambda^2(\lambda+1)}{\lambda-3}|z_1|^{1-3\lambda^{-1}}, & \lambda \neq 3 \\ 12\ln|z_1|, & \lambda = 3 \end{array}\right..$$

Мировая линии частицы $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0|t|^{\lambda+1}$ или $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0 t$ в цилиндрических координатах. Частица двигается в полуплоскости $\varphi = \varphi_0$ по графику степенной функции $z = Cr^{1+\lambda}$.

Если $a \neq 0,\ \lambda = -1,$ то $V_1 = V_0 e^{2a^{-1}x_1},\ p = p_0 + \dfrac{1}{2}a^2 V_0^{-1} e^{-2a^{-1}x_1} = P(V_1, S_1) \Rightarrow S_1 = S_0 = \text{const}$. Мировая линия частицы $z = z_0,\ y = y_0 t,\ x = t(x_0 + a\ln|t|)$ задает плоскую траекторию по квазилучу $x = \dfrac{y}{y_0}\left(x_0 + a\ln\left|\dfrac{y}{y_0}\right|\right)$.

Если $a = 0,\ \lambda = -1,$ то $V_1 = |z_1|^{-2}F(x_1, y_1),\ p = p_0,$ $S_1 = S_0$ для уравнения состояния $p = P(S)$. Мировая линия частицы $z = z_0$, $r = r_0 t$, $\varphi = \varphi_0$ задает движение по лучу $z = z_0$, $\varphi = \varphi_0$ с постоянной скоростью.

Пусть нулевое собственное значение матрицы A простое. Достаточно рассмотреть два случая матрицы A из пункта 3 при этом $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$.

В первом случае $u_1 = a_1$, $v_1 = \lambda_1 y_1$, $w_1 = \lambda_2 z_1$ уравнения (2) принимают вид:

$$
\begin{gathered}
D_1 S_1 = a_1 S_{1x_1} + \lambda_1 y_1 S_{1y_1} + \lambda_2 z_1 S_{1z_1} = 0,\\
D_1 V_1 = V_1(3 + \lambda_1 + \lambda_2),\\
V_1 p_{x_1} = -a_1,\ \ V_1 p_{y_1} = -\lambda_1(\lambda_1 + 1)y_1,\\
V_1 p_{z_1} = -\lambda_2(\lambda_2 + 1)z_1 \Rightarrow\\
a_1 V_{1y_1} = \lambda_1(\lambda_1 + 1)y_1 V_{1x_1},\\
a_1 V_{1z_1} = \lambda_2(\lambda_2 + 1)z_1 V_{1x_1},\\
\lambda_2(\lambda_2 + 1)z_1 V_{1y_1} = \lambda_1(\lambda_1 + 1)y_1 V_{1z_1}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Если $a_1 \neq 0,\ \lambda_i \neq -1,$ то уравнения (10) противоречивы.

Если $a_1 = 0,\ \lambda_i \neq -1,\ \lambda_1 \neq \lambda_2,$ то уравнения (10) противоречивы.

Если $a_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq -1$, то

$$
\begin{gathered}
V_1 = V_0 J^{1+\frac{3}{2\lambda}},\ \ J = y_1^2 + z_1^2,\\
p = p_0 + \frac{1}{3}V_0^{-1}\lambda^2(\lambda + 1)J^{\frac{-3}{2\lambda}} = P(V_0 J^{1+\frac{3}{2\lambda}}, S_1) \Rightarrow\\
S_1(J) = S_0 = \text{const},\ \ \lambda \neq -\tfrac{3}{2}.
\end{gathered}
$$

Получаем движение частиц $x = x_0 t$, $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0|t|^{\lambda+1}$ в полуплоскости $\varphi = \varphi_0$ по степенной траектории $r = r_0|x x_0^{-1}|^{\lambda+1}$.

Если $a_1 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda = \lambda_2 \neq -1$, то

$$
V_1 = V_0|z_1|^{1+2\lambda^{-1}},\ \ S = S_0,
$$

$$
p = p_0 - V_0^{-1}\begin{cases} \dfrac{\lambda^2(\lambda+1)}{\lambda - 2}|z_1|^{1-2\lambda^{-1}}, & \lambda \neq 2\\ 6\ln|z_1|, & \lambda = 2 \end{cases}.
$$

Частица двигается с мировой линией $x = x_0 t$, $y = y_0$, $z = z_0|t|^{\lambda+1}$ по плоской степенной траектории $z = z_0|x x_0^{-1}|^{\lambda+1}$.

Если $a_1 \neq 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 \neq -1,$ то уравнения (10) противоречивы.

Если $a_1 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то

$$
\begin{gathered}
V_1 = V_0 e^{a_1^{-1}x_1},\ \ S_1 = S_0,\\
p = p_0 + V_0^{-1}a_1^2 e^{-a_1^{-1}x_1} = p_0 + a_1^2 V_1^{-1}.
\end{gathered}
$$

Частицы двигаются вдоль оси x: $y = y_0$, $z = z_0$, $x = t(x_0 + a_1\ln|t|)$.

Во втором случае матрицы A из пункта 3: $u_1 = a_1$, $v_1 = a y_1 + b z_1$, $w_1 = -b y_1 + a z_1$, $b \neq 0$, система (2) в цилиндрических координатах $y_1 = r_1\cos\varphi_1$, $z_1 = r_1\sin\varphi_1$ принимает вид:

$$
\begin{gathered}
D_1 S_1 = a_1 S_{1x_1} + a r_1 S_{1r_1} - b S_{1\varphi_1} = 0,\\
D_1 V_1 = V_1(2a + 3),\\
V_1 p_{x_1} = -a_1,\ \ V_1 p_{r_1} = -r_1(a^2 + a - b^2),\\
V_1 p_{\varphi_1} = r_1^2 b(2a + 1)
\end{gathered}
\tag{11}
$$

с условиями совместности

$$
\begin{gathered}
a_1 V_{1r_1} = r_1(a^2 + a - b^2)V_{1x_1},\\
a_1 V_{1\varphi_1} = -b(2a + 1)r_1^2 V_{1x_1},\\
(a^2 + a - b^2)V_{1\varphi_1} + b(2a + 1)r_1 V_{1r_1} = 2b(2a - 1)V_1.
\end{gathered}
$$

Если $a_1 \neq 0$, то исключая производные V_{1r_1}, $V_{1\varphi_1}$ из последнего равенства, получим

$$
V_1 a_1 b(2a + 1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ \ V_{1\varphi_1} = 0.
$$

Уравнение для V_1 в (11) интегрируем $V_1 = r_1^{-4}F(J)$, $J = r_1 e^{\frac{x_1}{2a_1}}$. Оставшееся уравнение для V_1

$$
2a_1^2(-4F + JF') = -r_1^2 JF'\left(b^2 + \frac{1}{4}\right)
$$

расщепляем по свободной переменной r_1: $F' = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ противоречие.

Пусть $a_1 = 0$. Тогда $V_{1x_1} = 0 = p_{x_1}$, $a \neq -1$ и уравнения для V_1 совместны:

$$
V_1 = V_0 r_1^n e^{-k\varphi_1},\ \ k = \frac{3b(2a + 1)}{(a + 1)(a^2 + b^2)},
$$

$$
n = \frac{b^2(2a - 1) + a(a + 1)(2a + 3)}{(a + 1)(a^2 + b^2)}.
$$

Интегрируем уравнения (11)

$$
\begin{gathered}
p = p_0 + \frac{1}{3}V_0^{-1}(a + 1)(a^2 + b^2)r_1^{2-n}e^{k\varphi_1} =\\
= p_0 + \frac{1}{3}(a + 1)(a^2 + b^2)r_1^2 V_1^{-1} = P(V_1, S_1),\\
S_1 = G(r_1 e^{ab^{-1}\varphi_1}) \Rightarrow r_1^{1+\frac{an}{bk}} =\\
= G^{(-1)}(S_1)V_0^{\frac{-a}{bk}}V_1^{\frac{a}{bk}}.
\end{gathered}
$$

Отсюда определяем уравнение состояния $p = P(V_1, S_1)$, для которого найдено решение

$$
\begin{gathered}
u = xt^{-1},\ \ v = t^{-1}((a + 1)y + bz),\\
w = t^{-1}(-by + (a + 1)z).
\end{gathered}
$$

В цилиндрических координатах $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ частицы двигаются по закону:

$$
r = r_0|t|^{a+1},\ \ \varphi = \varphi_0 - b\ln|t|,\ \ x = x_0 t.
$$

Траектория — логарифмическая спираль $r = r_0\exp(b^{-1}(a + 1)(\varphi_0 - \varphi))$ на степенной поверхности вращения $r = r_0|x x_0^{-1}|^{a+1}$.

7. Заключение

Рассмотрены все случаи уравнений состояния, для которых существуют решения с линейным полем скоростей для автомодельной подмодели уравнений газовой динамики. Возможны движения частиц по лучам и квазилучам, плоским степенным и спиральным траекториям, пространственным спиральным траекториям на поверхности вращения степенной кривой. Такие решения относятся к классу дифференциально инвариантных для уравнений газовой динамики как идеальной, так и с постоянной вязкостью.

Список литературы / References

[1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
Ovsyannikov L.V. The “podmodeli” program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, Iss. 4. Pp. 601–627.
DOI: 10.1016/0021-8928(94)90137-6

[2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «ПОДМОДЕЛИ» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
EDN: yhiucd
Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the “Podmodeli” program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, Iss. 3. Pp. 349–358.
DOI: 10.1016/S0021-8928(99)00046-5

[3] Ovsyannikov L.V. Partially invariant solutions to gas dynamics equations. Modern Group Analysis VII // Developments in Theory, Computation and Application: Proceedings of the International Conference, Nordfjordeid, Norway, 30 June–5 July 1997. Trondheim: MARS Publishers. 1999. Pp. 263–274.

[4] Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
MathNet: smj1100
Khabirov S.V. Classification of Differential Invariant Submodels // Siberian Mathematical Journal. 2004. V. 45. Pp. 562–579.
DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf

[5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
Ovsyannikov L.V. Lectures on the fundamtntals of gas dynamics. Moscow–Izhevsk. 2003. 336 p. (in Russian).

[6] Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука. 1988. 424 с.
Cherniy G.G. Gas dynamics. Moscow: Nauka. 1988. 424 p. (in Russian).

[7] Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика. М.: Торус пресс. 2010. 440 с.
Kraiko A.N. Teoretical gas dynamics. Moscow. Torus press. 2010. 440 p. (in Russian).

[8] Овсянников Л.В. Новые решения гидродинамики // ДАН СССР. 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
Ovsyannikov L.V. New solutions of hydrodynamics equations // Doklads of Russian Academy of Sciences. 1956. V. 111, Iss. 1. Pp. 47–49.

[9] Овсянников Л.В. О периодических движениях газа // ПММ. 2001. Т. 65, № 4. С. 567–577.
Ovsyannikov L.V. The periodic motions of a gas // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2001. V. 65, Issue 4. Pp. 553–563.
DOI: 10.1016/S0021-8928(01)00061-2

[10] Овсянников Л.В. Газовый маятник // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 115–119.
EDN: ontidr
Ovsyannikov L.V. A gas pendulum // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2000. V. 41. Pp. 865–869.
DOI: 10.1007/BF02468732

[11] Тарасова Ю.В. Классификация подмоделей с линейным полем скоростей в газовой динамике // СибЖИМ. 2009. Т. 12, № 4(40). С. 128–136.
Tarasova Ju.V. Classification of submodels with the linear fiel of velocities // Siberian Journal Industrial Mathematics. 2009. V. 12, Iss. 4(40). Pp. 128–136. (in Russian)
EDN: kyrbnt

[12] Хабиров С.В. Конические закрученные течения // Труды Всеросийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Уфа: Гилем. 2011. С. 116–118.
Khabirov S.V. Conic twisted flow // Proc. of the Russian science conference “Difference equations and its aplications”. Ufa: Gilem. 2011. Pp. 116–118 (in Russian).

[13] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Простые волны конических движений // Уфимский математический журнал. 2022. Т. 14, № 2, С. 82–93.
DOI: 10.13108/2022-14-2-78 Mukminov T.F., Khabirov S.V. Simple waves of conic motions // Ufa Mathematical Journal. 2022. V. 14, Iss. 2, Pp. 78–89.
MathNet: ufa610

[14] Хабиров С.В. Инвариантные движения частиц общей трехмерной подгруппы группы всех пространственных переносов // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, № 4, ч. 1. С. 400–414.
Khabirov S.V. Partics invariant motions general 3-dmensional subgroup of all space translations group // Chelybinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. V. 5, Iss. 4, part 1. Pp. 408–414. (in Russian)
DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15402

Сведения об авторах / Information about the Authors

Салават Валеевич Хабиров
доктор физ.-мат. наук, профессор
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Salavat Valeevich Khabirov
Sc.D. (Phys. & Math.), Prof.
Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia
habirov@anrb.ru
ORCID: 0000-0002-6126-9033