ISSN: 2658–5782

Номер 2

2025

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 **20** (2025) 2: 60–67

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2025.2.009
DOI 10.21662/mfs2025.2.009
УДК / UDC 66.011

Получена / Received 21.05.2025
Принята / Accepted 5.06.2025

# Анализ многофазной модели течения газовой смеси через слой микросфер в условиях селективного отбора компонентов

**А.С. Верещагин ✉, И.В. Казанин, В.Н. Зиновьев, В.М. Фомин**

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

E-mail: vereshchag@itam.nsc.ru

Приводится математическая односкоростная, однотемпературная модель нестационарного течения смеси газов через пористую среду из микросфер, имеющих дисперсное распределение по физическим и геометрическим параметрам. Для системы квазилинейных уравнений в частных производных, описывающих модель, доказывается её гиперболичность и приводится оценка для собственных значений. Выводятся и описываются безразмерные критерии, отвечающие за течение газовой смеси по покоящемуся слою из микросфер в условиях селективной газовой проницаемости. Выводится аналитическое решение стационарной одномерной задачи течения бинарной смеси и приводятся результаты численного эксперимента двух задач в рамках проблемы разделения газовых смесей в нестационарном режиме.

**Ключевые слова:** гелий, микросферы, природный газ, мембраны, извлечение

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области (код проекта 23-29-100068).

# Analysis of a multiphase model of gas mixture flow through a layer of microspheres under conditions of selective extraction of components

**A.S. Vereshchagin ✉, I.V. Kazanin, V.N. Zinovyev, V.M. Fomin**

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk

E-mail: vereshchag@itam.nsc.ru

A mathematical single-speed, single-temperature model of non-stationary gas mixture flow through a porous medium of microspheres with a dispersed distribution by physical and geometric parameters is presented. For a system of quasi-linear partial differential equations describing the model, its hyperbolicity is proved and an estimate for the eigenvalues is given. Dimensionless criteria responsible for the gas mixture flow through a stationary layer of microspheres under conditions of selective gas permeability are derived and described. An analytical solution to the stationary one-dimensional problem of binary mixture flow is derived, and the results of a numerical experiment of two problems are presented within the framework of the problem of gas mixture separation in a non-stationary mode.

**Keywords:** helium, microspheres, natural gas, membranes, extraction

## 1. Введение

Российский потенциал по добыче гелия сосредоточен на территории Восточной Сибири и Дальнего Востока, где открыто более 30 гелийсодержащих газовых месторождений с высоким содержанием гелия (0,2–0,8 %) [1]. Специалисты Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН считают, что гелий, получаемый из месторождений природного газа Восточной Сибири и Дальнего Востока, может закрыть до 45 % его мирового спроса. Однако эти месторождения пока еще достаточно плохо освоены. При этом предполагается, что основными потребителями гелия будут страны Азиатско-Тихоокеанского региона.

В настоящее время производство гелия в РФ сосредоточено на Оренбургском гелиевом заводе (ПАО «Газпром»), которое в ближайшем будущем будет перераспределено на Амурский газоперерабатывающий завод ПАО «Газпром». Ресурсной базой для Амурского ГПЗ будет в основном природный газ Чаяндинского и Ковыктинского месторождений, поступающий по газопроводу «Сила Сибири». Дополнительно к Амурскому ГПЗ находится в режиме опытного применения гелиевый завод на Ярактинском нефтегазоконденсатном месторождении. Однако, большинство средних и, особенно, малых месторождений Восточной Сибири и Дальнего Востока продолжают вести добычу природного газа без выделения из него гелия как отдельного товарного продукта. Если не принять мер по созданию системы сбора, транспортировки и хранения гелия, то в течение следующих 20 лет общие потери гелия могут достигнуть 1 млрд. м$^3$.

Предлагаемый авторами мембранно-сорбционный метод выделения гелия из газовых смесей в своей основе опирается на избирательную проницаемость полых стеклянных микросфер по отношению к легким и инертным газам [2]. Для описания газовой проницаемости микросфер используется феноменологическая модель, подразумевающая диффузию целевого газа сквозь материал стенки, вызванную градиентом его концентрации. Такой подход приводит к описанию поглощения газов микросферами аналогично классическому подходу, используемому для мембран. В отличие от мембран для засыпки из микросфер точно неизвестна площадь рабочей поверхности, толщина стенки микросфер, коэффициент проницаемости стенки микросфер и давление на одной из рабочих поверхностей. Все эти параметры необходимо определять экспериментально по падению давления в ёмкости с микросферами, связанного с поглощением ими того или иного компонента. Также стоит отметить то обстоятельство, что засыпка микросфер неоднородна по физическим и геометрическим параметрам, а коэффициент проницаемости существенно зависит от температуры, что усложняет процесс моделирования.

В предыдущих работах, используя подходы, изложенные в [3, 4], была разработана математическая модель течения парогелиевой смеси газов через адсорбер, заполненный гранулами композитного адсорбента на основе микросфер [5]. Для описания процесса течения воздушно-гелиевой смеси через пористый слой из гранулированного сорбента используется сопряжённая математическая модель, состоящая из конвективной и диффузионной частей. Конвективная часть — это классическая модель многофазной среды, описываемая уравнениями законов сохранения массы импульса и энергии для смеси газов и гранулированной неподвижной среды. Диффузионная часть модели описывает массоперенос газов в цилиндрической частице адсорбента с учётом поглощения гелия микросферами, которые в ней содержатся.

В настоящей работе предлагается провести анализ модели течения бинарной смеси газов по адсорберу, заполненному неподвижным слоем микросфер, в котором конвективная составляющая будет такой же, как и в предыдущей работе, а правые части, отвечающие за обмен массой, импульсом и энергией между фазами, будут учитывать неравномерность распределения микросфер по геометрическим и физическим параметрам [6, 7]. Суть учёта неравномерности заключается в разделение микросфер по группам, внутри которых скорость поглощения газов одинаковая.

## 2. Математическая модель течения смеси газов в покоящемся слое микросфер с учетом их селективного поглощения

### 2.1. Уравнения в дивергентном виде

На основе задела [5, 7, 8] разработана математическая модель течения смеси газов через покоящийся слой из микросфер с учётом селективного поглощения различных газов из смеси в условиях дисперсного распределения микросфер по параметрам.

Течение $N$-компонентной смеси газов через слой микросфер с учётом их селективного поглощения описывается следующей системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = G, \tag{1}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \dots \\ \rho_{1N} \\ \rho_1 v \\ U_1 + U_2 + E_{k1} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho_{11} v \\ \dots \\ \rho_{1N} v \\ \rho_1 v^2 + p_1 \\ (U_1 + E_{k1} + p_1) v \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -K_1 \\ \dots \\ -K_N \\ f_1 - v\sum_{i=1}^N K_i \\ f_1 v \end{pmatrix},$$

где

$$f_1 = -\alpha_{pr}\mu(\rho_{1i}, T) m_1 v / k - \alpha_{pr}^2 \beta \rho_1 v^2 / \sqrt{k},$$

$$p_{1j} = \sum_{i=1}^N \rho_{1i} R_i T, \quad \rho_1 = \sum_{i=1}^N \rho_{1i}, \quad p_1 = \sum_{i=1}^N p_{1i},$$

$$U_1 = \sum_{i=1}^N \rho_{1i} C_{Vi} T, \quad E_k = \frac{\rho_1 v^2}{2},$$

$$U_2 = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \rho_{2i}^j C_{Vi} + m_2 \rho_{30} C_S \right) T,$$

$\rho_{1i}$ — плотность $i$-й компоненты газовой смеси ($i = 1, \dots, N$); $v$ — скорость потока; $f_1$ — сила сопротивления, соответствующая закону фильтрации Форхгеймера; $U_1$, $E_k$ — внутренняя и кинетическая энергия газовой смеси; $U_2$ — внутренняя энергия гранул с содержащимися в них газами; $p_{1i}$ — давление $i$-го газа ($i = 1, \dots, N$); $T$ — температура; $k$, $\beta$ — коэффициенты проницаемости пористого слоя в модели Форхгеймера; $m_1$, $m_2$ — пористость и объемная концентрация микросфер в адсорбере; $\mu(\rho_{1j}, T)$ — вязкость смеси газов ($j = 1, \dots, N$); $\alpha_{pr}$ — величина просвета пористого слоя; $C_{Vi}$ — удельная теплоемкость компоненты газовой смеси при постоянном объеме ($i = 1, \ldots, N$); $\rho_{30}$ — плотность стекла, из которого изготовлены микросферы; $C_S$ — удельные теплоемкость стекла; $R_i$ — индивидуальная газовая постоянные компоненты смеси ($i = 1, \ldots, i$); $L$ — длина адсорбера.

Система уравнений (1) представляет собой дифференциальную форму законов сохранения массы, импульса и энергии при течении газовой смеси через слой микросфер, в котором сопротивление среды учитывается в виде закона фильтрации Форхгеймера (выражение для $f_1$), а учёт перетока массы между фазами происходит с помощью массовых потоков $K_i$ ($i = 1, \ldots, N$). В то же время $K_i$ состоят из суммы $M$ слагаемых — $M$ групп для учёта дисперсности распределения микросфер по параметрам.

В соответствии с [6] дополнительно к этой системе уравнений добавляются $N \times M$ уравнений для массовых потоков $K_i^j$, учитывающих поглощение $i$-го газа $j$-й группой микросфер:

$$\frac{\partial \rho_{2i}^j}{\partial t} = K_i^j \quad (i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, M), \tag{2}$$

$$K_i^j = \beta_{ij}(T)(\alpha_{ij}\rho_{1i} - \rho_{2i}^j),$$

где $\rho_{2i}^j$ — плотность $i$-го газа, отвечающая $j$-ой группе; $M$ — количество групп, на которые разбивается сорбционный объем; $N$ — количество газовых компонент в смеси; $\beta_{ij} = \beta_{ij}(T)$ — коэффициент проницаемости $j$-ой группой микросфер $i$-ой компоненты газовой смеси; $\alpha_i^j$ — удельный сорбционный объем $j$-ой группой микросфер для $i$-ой компоненты газовой смеси. При этом

$$K_i = \sum_{j=1}^{M} K_i^j \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Коэффициент проницаемости $\beta_{ij}$ в данной модели является величиной обратной к характерному времени сорбции для данного газа по отношению к выбранной группе микросфер и фактически является основополагающей величиной при определении скорости поглощения того или иного компонента газа. Удельные сорбционные объемы $\alpha_{ij}$ отвечают за максимальное количество газа, которое может адсорбироваться в выбранную группу микросфер в равновесном состоянии системы.

### 2.2. Уравнения в недивергентном виде для бинарной смеси

Для частного случая бинарной смеси ($N = 2$) математическая модель (1)–(2) была преобразована к недивергентному виду:

$$u_t + A(u)u_x = f(u), \tag{3}$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{12} \\ v \\ T \end{pmatrix}, \quad A(u) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho_{11} & 0 \\ 0 & v & \rho_{12} & 0 \\ \dfrac{R_1 T}{\rho_1} & \dfrac{R_2 T}{\rho_1} & v & B_R/\rho_1 \\ 0 & 0 & \dfrac{p_1}{B_V} & \dfrac{B_{1V}}{B_V} v \end{pmatrix},$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} -K_1 \\ -K_2 \\ f_1/\rho_1 \\ \dfrac{(C_{V1}K_1 + C_{V2}K_2)T + \frac{Kv^2}{2}}{B_V} \end{pmatrix},$$

где

$$B_R = \rho_{11}R_1 + \rho_{12}R_2, \quad B_{1V} = \rho_{11}C_{V1} + \rho_{12}C_{V2},$$

$$B_V = C_{V1}(\rho_{11} + \rho_{21}) + C_{V2}(\rho_{12} + \rho_{22}) + C_{S3}\rho_{30}m_{22},$$

$$\rho_1 = \rho_{11} + \rho_{12}, \quad p_1 = \rho_{11}R_1 T + \rho_{12}R_2 T,$$

$$f_1 = -\alpha_{pr}\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T)m_1 v/k - \alpha_{pr}^2 \beta\rho_1 v^2/\sqrt{k}.$$

Соотношения, описывающие влияние температуры на коэффициент вязкости $\mu_i(T)$, имеют вид [9]:

$$\mu_i(T) = \mu_i^0 \frac{T_{ref} + C_i}{T + C_i}\left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{3/2}, \tag{4}$$

где $C_i$, $\mu_i^0$ — константа Сазерленда и вязкость гелия и воздуха при температуре $T_{ref}$ ($i = 1, 2$).

Для определения вязкости бинарной газовой смеси использовались формулы Вилке [10]:

$$\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) = \sum_{i=1}^{2} \frac{n_i(\rho_{11}, \rho_{12})}{\sum_{j=1}^{2} n_j(\rho_{11}, \rho_{12})\phi_{ij}(T)} \mu_i(T).$$

Здесь

$$\phi_{ij}(T) = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{\mu_i(T)}{\mu_j(T)}\right)^{1/2} \cdot \left(\dfrac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2}{\dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \dfrac{M_i}{M_j}\right)^{1/2}}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$n_i(\rho_{11}, \rho_{12}) = \frac{\rho_{1i}/M_i}{\sum_{j=1}^{2} \rho_{1j}/M_j}, \quad i = 1, 2,$$

где $n_i(\rho_{11}, \rho_{12})$ — молярная концентрация компонентов смеси ($i = 1, 2$); $\phi_{ij}(T)$ — вспомогательные функции ($i, j = 1, 2$); $M_1$, $M_2$ — молярные массы газов.

Уравнения дополняются уравнениями селективного поглощения газов микросферами:

$$\frac{\partial \rho_{2i,j}}{\partial t} = K_i^j, \tag{5}$$

где

$$K_i^j = \beta_{ij}(T)(\alpha_{ij}\rho_{1i} - \rho_{2i}), \quad K_i = \sum_{j=1}^{M} K_i^j$$

$$(i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, M).$$

где $M$ — количество групп микросфер.

Зависимость $\beta_{ij}$ от температуры подчиняется закону Аррениуса [11] вида:

$$\beta_{ij} = \beta_{0,ij} T e^{-\frac{E_{a,i}}{R_g T}} \quad (i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, M).$$

### 2.3. Характеристические числа дифференциальных уравнений в модели закона течения смеси газов

В работе [5] показано, что в области развитого течения ($v \neq 0$) у матрицы $A(u)$ всегда существует четыре различных действительных собственных значения $\lambda_i(u)$ ($i = 1, \ldots, 4$).

В случае $v > 0$ они будут удовлетворять условию

$$\lambda_1 < \frac{B_{1V}}{B_V} v < \lambda_2 < \lambda_3 = v < \lambda_4.$$

При этом $\lambda_1 \leqslant 0$ при $v \leqslant c$, и $\lambda_1 > 0$ при $v > c$, где $c$ — скорость звука бинарной смеси.

Показано, что при $v < 0$ они будут удовлетворять условию

$$\lambda_4 < \lambda_3 = v < \lambda_2 < \frac{B_{1V}}{B_V} v < \lambda_1.$$

При этом $\lambda_1 \leqslant 0$ при $v \leqslant -c$, и $\lambda_1 > 0$ при $v > c$.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что система квазилинейных уравнений (3) с матрицей $A(u)$ имеет гиперболический тип.

## 3. Безразмерные критерии для описания процесса течения бинарной смеси по покоящемуся слою микросфер

### 3.1. Характерные параметры течения и дополнительные соотношения

Введем безразмерные характеристики течения (со штрихами), используя следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll} \rho_{11} = \rho_0 \rho'_{11}, & \rho_{12} = \rho_0 \rho'_{12}, & \\ \rho_{21,j} = \rho_0 \rho'_{21,j}, & \rho_{22,j} = \rho_0 \rho'_{22,j} & (j = 1, \ldots, M), \\ v = v_0 v', & T = T_0 T', & \\ x = L x', & t = \tau t', & \end{array} \qquad (6)$$

где $\rho_0$ — характерная плотность; $v_0$ — характерная скорость; $L$ — длина адсорбера; $T_0$ — характерная температура в адсорбере; $\tau$ — характерное время процесса.

С учётом введенных обозначений можно следующим образом провести обезразмеривание дополнительных соотношений для бинарной смеси (3).

Безразмерная плотность

$$\rho_1 = \rho_0(\rho'_{11} + \rho'_{12}). \qquad (7)$$

Безразмерное давление

$$p_1 = p_0 p'_1 \left( \frac{R_2}{R_1}, \rho'_{11}, \rho'_{12}, T' \right), \qquad (8)$$

где

$$p_0 = \rho_0 R_1 T_0, \quad p'_1(A', \rho'_{11}, \rho'_{12}, T') = \rho'_{11} T' + \rho'_{12} A' T'.$$

Безразмерные коэффициенты проницаемости микросферы

$$\beta_{ij}(T) = \beta^0_{ij} \beta' \left( \frac{E_{a,i}}{R_g T_0}, T' \right), \qquad (9)$$

$$(i = 1, 2, \quad j = 1, \ldots, M).$$

где $\beta^0_{ij} = \beta_{0,ij} T_0$, $\beta'(A', T') = T' e^{-A'/T'}$.

Безразмерная динамическая вязкость компоненты газовой смеси

$$\mu_i = \mu^0_i(T_0) \mu'_s \left( \frac{C_i}{T_0}, T' \right) \quad (i = 1, 2), \qquad (10)$$

где

$$\mu^0_i(T_0) = \mu^{ref}_i \frac{T_{ref} + C_i}{T_0} \left( \frac{T_0}{T_{ref}} \right)^{3/2},$$

$$\mu'_s(B', T') = \frac{T'^{3/2}}{T' + B'}.$$

Безразмерная динамическая вязкость газовой смеси

$$\mu(\rho_{1l}, T) = \mu_0(T_0) \mu' \left( \frac{\mu^0_i}{\mu^0_j}, \frac{C_k}{T_0}, \frac{M_p}{M_r}, \rho'_{1s}, T' \right) \qquad (11)$$

$$(i, j, k, l, p, r, s = 1, 2),$$

где

$$\mu_0(T_0) = \mu^0_1(T_0),$$

$$\mu' \left( X'_{ij}, Y'_k, Z'_{pr}, W'_s, T' \right) = $$

$$= \sum_{i=1}^{2} \frac{n_i(Z'_{pr}, W'_s) X'_{i1} \mu'_s(Y'_i, T')}{\sum_{j=1}^{2} n_j(Z'_{pr}, W'_s) \phi_{ij} \left( X'_{ij}, Y'_i, Y'_j, Z'_{ij}, T' \right)},$$

$$\phi_{ij}(A', B', C', D', T') = $$

$$= \frac{\left[ 1 + \left( A' \cdot \dfrac{\mu'_s(B', T')}{\mu'_s(C', T')} \right)^{1/2} \cdot D'^{-1/4} \right]^2}{\dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot (1 + D')^{1/2}},$$

$$n_i(U'_s, V'_{pr}) = \frac{U'_i}{\sum_{k=1}^{2} U'_k V'_{ki}}.$$

Для потенциальной энергии справедливы следующие соотношения

$$U_1 = (C_{V1} \rho_{11} + C_{V2} \rho_{12}) T = (C_{V1} \rho_0 \rho'_{11} +$$

$$+ C_{V2} \rho_0 \rho'_{12}) T_0 T' = U_0 U'_1 \left( \frac{C_{V2}}{C_{V1}}, \rho'_{11}, \rho'_{12} \right),$$

где

$$U_0 = C^1_V \rho_0 T_0, \quad U'_1(A', \rho'_{11}, \rho'_{12}) = (\rho'_{11} + A' \rho'_{12}) T',$$

$$U_2 = (C_{V1} \rho_{21} + C_{V2} \rho_{22} + \rho_{30} m_{22} C_{3S}) T =$$

$$= (C_{V1} \rho_0 \rho'_{21} + C_{V2} \rho_0 \rho'_{22} + \rho_{30} m_{22} C_{3S}) T_0 T' =$$

$$= U_0 U'_2 \left( \frac{C_{V2}}{C_{V1}}, \frac{C_{S3}}{C_{V1}}, m_{22}, \frac{\rho_{30}}{\rho_0}, \rho'_{21}, \rho'_{22} \right),$$

где

$$U'_2(A', B', C', D', \rho'_{21}, \rho'_{22}) = (\rho'_{21} + A' \rho'_{22} + B' C' D') T'.$$

Тогда

$$U = U_1 + U_2 = U_0 U' \left( \frac{C_{V2}}{C_{V1}}, \frac{C_{S3}}{C_{V1}}, m_{22}, \frac{\rho_{30}}{\rho_0}, \rho'_{21}, \rho'_{22} \right),$$

где

$$U'(A',B',C',D',\rho'_{21},\rho'_{22}) = \\ = \left(\rho'_{11}+\rho'_{21}+A'(\rho'_{12}+\rho'_{22})+B'C'D'\right)T'.$$

Выпишем систему уравнений для бинарной смеси (3) в безразмерном виде.

### 3.2. Основные уравнения в безразмерном виде

Законы сохранения массы для каждого газа

$$\frac{L}{v_0\tau}\frac{\partial\rho'_{11}}{\partial t'}+\frac{\partial\rho'_{11}v'}{\partial x'}=-\frac{L}{\rho_0 v_0}K_1, \tag{12}$$

$$\frac{L}{v_0\tau}\frac{\partial\rho'_{12}}{\partial t'}+\frac{\partial\rho'_{12}v'}{\partial x'}=-\frac{L}{\rho_0 v_0}K_2, \tag{13}$$

Рассмотрим правые части

$$-\frac{L}{\rho_0 v_0}K_i=-\frac{L}{\rho_0 v_0}\sum_{j=1}^{M}\beta_{ij}(\alpha_{ij}\rho_{1i}-\rho_{2i})= \\ =-\sum_{j=1}^{M}\frac{L\beta^0_{ij}}{v_0}\beta'\left(\frac{E_{a,i}}{R_gT_0}\right)(\alpha_{ij}\rho'_{1i}-\rho'_{2i})= \\ =-\frac{L\beta^0_i}{v_0}\sum_{j=1}^{M}\frac{L\beta_{ij}}{v_0}\beta'\left(\frac{E_{a,i}}{R_gT_0}\right)(\alpha_{ij}\rho'_{1i}-\rho'_{2i})\quad i=1,2.$$

Закон сохранения импульса для смеси

$$\frac{L}{v_0\tau}\frac{\partial v'}{\partial t'}+\frac{p_0}{\rho_0v_0^2}\frac{T'}{\rho'_1}\frac{\partial\rho_{11'}}{\partial x'}+\frac{p_0}{\rho_0v_0^2}\frac{R_2}{R_1}\frac{T'}{\rho'_1}\frac{\partial\rho'_{12}}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial x'}+ \\ +\frac{p_0}{\rho_0v_0^2}\frac{p'_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\rho'_1T'}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{L}{v_0^2}\frac{f_1}{\rho_1},$$

Рассмотрим правую часть

$$\frac{L}{v_0^2}\frac{f_1}{\rho_1}=-m_1\frac{\alpha_{pr}\mu_0(T_0)L}{\rho_0v_0k}\frac{\mu'\left(\frac{\mu^0_i}{\mu^0_j},\frac{C_k}{T_0},\frac{M_p}{M_r}\right)v'}{\rho'_1}-\frac{\alpha^2_{pr}\beta L}{\sqrt{k}}v'^2.$$

Закон сохранения энергии для смеси

$$\frac{L}{v_0\tau}\frac{\partial T'}{\partial t'}+\frac{R_1}{C_{V1}}\frac{p'_1\left(\frac{R_2}{R_1}\right)T'}{U'\left(\frac{C_{V2}}{C_{V1}},\frac{C_{S3}}{C_{S1}},m_{22},\frac{\rho_{30}}{rho_0}\right)}\frac{\partial v'}{\partial x'}+ \\ v'\frac{U'_1\left(\frac{C_{V2}}{C_{V1}}\right)}{U'\left(\frac{C_{V2}}{C_{V1}},\frac{C_{S3}}{C_{S1}},m_{22},\frac{\rho_{30}}{\rho_0}\right)}\frac{\partial T'}{\partial x'}= \\ =\frac{L}{v_0T_0}\frac{T}{U}\Bigg((C_{V1}K_1+C_{V2}K_2)T+ \\ +\frac{(K_1+K_2)v^2}{2}\Bigg). \tag{14}$$

Рассмотрим правую часть

$$\frac{L}{v_0T_0}\frac{T}{U}\left((C_{V1}K_1+C_{V2}K_2)T+\frac{(K_1+K_2)v^2}{2}\right)= \\ =\frac{L}{v_0U_0}\frac{T'}{U'}\Bigg[\rho_0C_{V1}T_0\Bigg(\sum_{j=1}^{M}\beta_{1j}(\alpha_{1j}\rho'_{11}-\rho'_{21})+ \\ +\frac{C_{V2}}{C_{V1}}\sum_{j=1}^{M}\beta_{2j}(\alpha_{ij}\rho'_{12}-\rho'_{22})\Bigg)T'+ \\ +\rho_0v_0^2\frac{\sum_{i,j}\beta_{ij}(\alpha_{ij}\rho'_{1i}-\rho'_{2i})v'^2}{2}\Bigg]= \\ =\frac{T'}{U'\left(\frac{C_{V2}}{C_{V1}},\frac{C_{S3}}{C_{S1}}m_{22},\frac{\rho_{30}}{\rho_0}\right)}\Bigg[\Bigg(\frac{L\beta^0_1}{v_0}\sum_{j=1}^{M}\frac{\beta^0_{1j}}{\beta^0_1}\beta'\left(\frac{E_{a,1}}{R_gT_0}\right)\times \\ \times(\alpha_{1j}\rho'_{11}-\rho'_{21})+ \\ +\frac{C_{V2}}{C_{V1}}\frac{L\beta^0_2}{v_0}\sum_{j=1}^{M}\frac{\beta^0_{2j}}{\beta^0_2}\beta'\left(\frac{E_{a,2}}{R_gT_0}\right)(\alpha_{ij}\rho'_{12}-\rho'_{22})\Bigg)T'+ \\ +\frac{\rho_0v_0^2}{U_0}\frac{\sum_{i,j}\frac{L\beta^0_i}{v_0}\frac{\beta^0_{ij}}{\beta^0_i}\beta'\left(\frac{E_{a,i}}{R_gT_0}\right)(\alpha_{ij}\rho'_{1i}-\rho'_{2i})v'^2}{2}\Bigg].$$

Обезразмеривание уравнений (5) даёт следующее соотношение

$$\frac{\partial\rho'_{2,ij}}{\partial t'}=\tau\beta^0_i\frac{\beta^0_{ij}}{\beta^0_i}\beta'\left(\frac{E_{a,i}}{R_gT_0}\right)(\alpha_{ij}\rho'_{1i}-\rho'_{2,ij}).$$

### 3.3. Основные безразмерные критерии

В результате проделанных операций можно выделить следующие основные безразмерные критерии, описывающие течение бинарной смеси в адсорбере с учётом селективного поглощения газов микросферами.

Структурные параметры, определяющие геометрию засыпки:

- $m_1$, $m_{22}$ — объёмные концентрации;
- $\alpha_{ij}$ — удельные сорбционные объёмы.

Параметры, зависящие только от физических характеристик сред:

- $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{M_1}{M_2}$ — отношение газовых постоянных;
- $\dfrac{R_1}{C_{V2}}$ — отношение газовой постоянной к удельной теплоемкости;
- $\dfrac{C_{V2}}{C_{V1}}$, $\dfrac{C_{S3}}{C_{V1}}$ — отношение удельных теплоемкостей;
- $\dfrac{\mu^0_2}{\mu^0_1}$ — отношение характерных вязкостей газов.

Параметры, характеризующие течение газов:

- $\dfrac{L}{v_0\tau}$ — критерий Струхаля;

- $\dfrac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = \dfrac{R_1 T_0}{v_0^2}$ — критерий Эйлера;
- $\dfrac{\rho_{30}}{\rho_0}$ — отношение плотности твердой фазы и характерной величины плотности газовой фазы;
- $\dfrac{L\beta_i^0}{v_0}$ — отношение скоростей процессов конвекции и сорбции в адсорбере ($i = 1, 2$);
- $\tau\beta_i^0$ — отношение характерного времени процесса ко времени сорбции ($i = 1, 2$);
- $\dfrac{\beta_{ij}^0}{\beta_i^0}$ — отношение коэффициентов скорости сорбции для выбранного газа ($i = 1, 2$);
- $\dfrac{\alpha_{pr}\mu_0(T_0)L}{\rho_0 v_0 k}$ — первый безразмерный коэффициент в законе Форхгеймера;
- $\dfrac{\alpha_{pr}^2 \beta L}{\sqrt{k}}$ — второй безразмерный коэффициент в законе Форхгеймера;
- $\dfrac{E_{a,i}}{R_g T_0}$ — отношение энергии активации выбранного газа ($i = 1, 2$) к характерной внутренней энергии смеси;
- $\dfrac{C_i}{T_0}$ — отношение числа Сазерленда к характерной температуре для выбранного газа ($i = 1, 2$);
- $\dfrac{\rho_0 v_0^2}{U_0} = \dfrac{v_0^2}{R_1 T_0}$ — отношение кинетической энергии к внутренней.

Полученные критерии в дальнейшем будут использованы для проведения параметрического исследования процесса разделения газовой смеси.

## 4. Аналитическое решение для одномерного стационарного случая

Для тестирования численных решений рассмотрен стационарный одномерный частный случай исходной модели для бинарной смеси газов (3):

$$\begin{array}{rcl} \rho_{11} v & = & C_1, \\ \rho_{12} v & = & C_2, \\ \left[\rho_1 v^2 + p_1\right]_x & = & f_1, \\ \left[(U_1 + E_{k1} + p_1)v\right]_x & = & f_1 v, \end{array}$$

где $C_1$, $C_2$ — константы интегрирования;

$$f_1 = -\alpha_{pr}\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) m_1 v/k - \alpha_{pr}^2 \beta \rho_1 v^2/\sqrt{k};$$

$$U_1 = (C_V^1 \rho_{11} + C_V^2 \rho_{12})T; \quad E_{k1} = \frac{\rho_1 v^2}{2};$$

$$p_1 = (\rho_{11} R_1 + \rho_{12} R_2)T.$$

Тогда

$$f_1 = -\alpha_{pr}\mu_0 m_1 v/k - \alpha_{pr}^2 \beta \rho_1 v^2/\sqrt{k} = \\ = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC)v,$$

где

$$A = \alpha_{pr} m_1/k, \quad B = \alpha_{pr}^2 \beta/\sqrt{k}, \quad C = C_1 + C_2.$$

Пусть $D_R = C_1 R_1 + C_2 R_2$, $D_V = C_V^1 C_1 + C_V^2 C_2$, тогда

$$p_1 = D_R T/v, \quad U_1 = D_V T/v, \quad E_{k1} = Cv/2.$$

Исходная модель переписывается в виде:

$$Cv_x + D_R\left(\frac{T}{v}\right)_x = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC)v,$$
$$Cvv_x + (D_R + D_V)T_x = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC)v^2.$$

После раскрытия $(T/v)_x = T_x/v - Tv_x/v^2$ и умножения первого уравнения на $v$ получим

$$\left(Cv - D_R\frac{T}{v}\right)v_x + D_R T_x = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC)v^2,$$
$$Cvv_x + (D_R + D_V)T_x = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC)v^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое получим, что

$$D_R\frac{v_x}{v} + D_V\frac{T_x}{T} = 0,$$

или после интегрирования для некоторых констант $C_3'$ и $C_3$:

$$v^{D_R} T^{D_V} = C_3',$$

или

$$T = C_3 v^{-D_R/D_V}.$$

Тогда $T_x = -\dfrac{D_R}{D_V} C_3 v^{-D_R/D_V - 1} v_x$, и последнее уравнение после сокращения на $v^2$ перепишется в виде:

$$\left[\frac{C}{v} - (D_R + D_V)\frac{D_R}{D_V} C_3 v^{-D_R/D_V - 3}\right] v_x = \\ = -(A\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) + BC), \tag{15}$$

где

$$\rho_{11} = C_1/v, \quad \rho_{12} = C_2/v, \quad T = C_3 v^{-D_R/D_V}. \tag{16}$$

Заморозим вязкость и рассмотрим приближение $\mu(\rho_{11}, \rho_{12}, T) = \mu_0 = \mathrm{const}$. Следовательно для некоторой новой константы $C_4$:

$$C\ln v + \frac{D_R(D_R + D_V)}{D_R + 2D_V} C_3 v^{-D_R/D_V - 2} = \\ = -(A\mu_0 + BC)x + C_4. \tag{17}$$

Таким образом, соотношения (15), (16) и (17), (16) являются аналитическим решением в случае стационарного течения бинарной смеси через покоящийся слой микросфер с учётом силы сопротивления в форме Форхгеймера в общем случае и в случае замороженной вязкости соответственно.

## 5. Численное моделирование процесса обогащения воздушно-гелиевой смеси в нестационарном режиме

Для моделирования процесса заполнения адсорбера газовой смесью с микросферами на основании математической модели, описываемой уравнениями (1), использовалась WENO-разностная схема [12]. Численная реализация была протестирована на сходимость на различных сетках и на сходимость к полученным стационарным аналитическим решениям.

Было проведено моделирование следующих задач:

а) волна концентрации распространяется по направлению течения газа (волна нагрузки), при этом микросферы будут насыщаться целевым газом, а смесь обедняться (стадия насыщения микросфер);

б) волна концентрации распространяется против направления течения газа (волна разгрузки), при этом адсорбент уже насыщен целевым газом и он будет выделяться повышенными темпами на фронте волны (режим регенерации микросфер).

Для моделирования использовалась воздушная гелиевая смесь, подаваемая в адсорбер под давлением 10 атм с объемной концентрацией гелия примерно 1 %. Длина адсорбера $L = 5$ м, температура 303 К. В качестве микросфер использовались кремнеземные микросферы с предварительно определёнными характеристиками [13].

Распространение волны концентрации гелия при заполнении адсорбера показано на рис. 1.

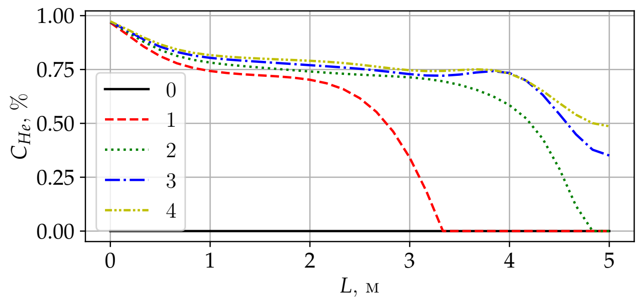


Рис. 1. Распространение волны концентрации гелия по адсорбционной колонке при её заполнении в разные моменты времени с промежутком $\Delta t = 1$ с

Длительность процесса заполнения составляла 4 с. За это время волна доходит до конца адсорбера, однако концентрация гелия в свободном объеме меньше, чем в исходном газе. Это связано с тем, что часть из него адсорбировалось микросферами (примерно 25 %).

После этого моделировался процесс откачивания газовой смеси на правой границе ($L = 5$ м) адсорбера в вакуум при закрытой левой границе. Результат этого процесса представлен на рис. 2.

Процесс истечения гелиевой смеси из адсорбера протекает с постоянным повышением концентрации гелия в смеси от значения, которое установилось в адсорбере в начале процесса откачивания. Представленный эксперимент показывает, что эффект увеличения концентрации наблюдается, однако необходимо проводить дальнейшее параметрическое исследование циклического процесса заполнения и откачки адсорбера для определения возможных оптимальных целевых значений процесса разделения смеси в нестационарном режиме.

## 6. Заключение

В результате на основе предварительных исследований разработана математическая модель нестационарного течения смеси газов через пористую среду из микросфер, имеющих дисперсное распределение по физическим и геометрическим параметрам. Модель является однотемпературной и односкоростной, а сопротивление модели описывается законом фильтрации Форхгеймера. Показано, что система квазилинейных дифференциальных уравнений, описывающих модель, имеет гиперболический тип. Показано, что она всегда в случае развитого течения имеет различные действительные характеристические направления. Получены и описаны безразмерные критерии, отвечающие за течение газовой смеси по покоящемуся слою из микросфер в условиях селективной газовой проницаемости. Получено аналитическое решение стационарной одномерной задачи течения бинарной смеси, и проведен численный эксперимент двух задач в рамках проблемы разделения газовых смесей в нестационарном режиме.

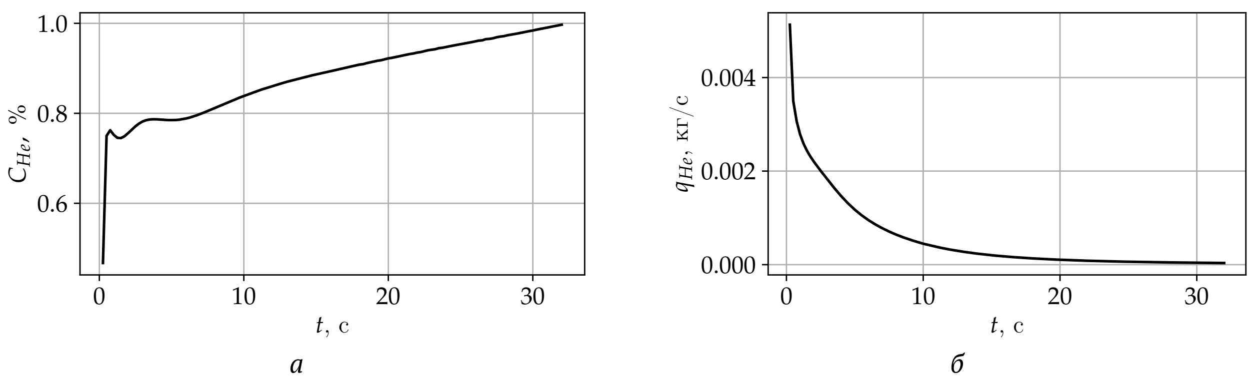


Рис. 2. Зависимость от времени мгновенной концентрации (*а*) и мгновенного массового потока гелия (*б*) на выходе из адсорбера

## Список литературы / References


[1] Якуцени ВП. Сырьевая база гелия в мире и перспективы развития гелиевой промышленности. *Нефтегазовая геология. Теория и практика*. 2009;**4**(2):1–24.
Yakutseni VP. The raw material base of helium in the world and prospects for the development of the helium industry. *Oil and gas geology. Theory and practice*. 2009;**4**(2):1–24 (in Russian).
EDN: knnunf

[2] Зиновьев ВН, Казанин ИВ, Пак АЮ, Верещагин АС, Лебига ВА, Фомин ВМ. Проницаемость полых микросферических мембран по отношению к гелию. *Инженерно-физический журнал*. 2016;**89**(1):24–36. EDN: vhtdtf
Zinoviev VN, Kazanin IV, Pak AYu, Vereshchagin AS, Lebiga VA, Fomin VM. Permeability of hollow microspherical membranes to helium. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2016;**89**(1):25–37.
DOI: 10.1007/s10891-016-1350-7

[3] Баренблатт ГИ, Лобковский ЛИ, Нигматулин РИ. Математическая модель истечения газа из газонасыщенного льда и газогидратов. *Доклады Академии Наук*. 2016;**470**(4):458–461.
DOI: 10.7868/s0869565216280148
BarenblatT GI, Lobkovsky LI, Nigmatulin RI. A mathematical model of gas outflow from gas-saturated ice and gas hydrates. *Doklady Earth Sciences*. 2016;**470**(2):1046–1049. DOI: 10.1134/S1028334X16100019

[4] Нигматулин РИ. *Динамика многофазных сред. Часть 1*. М. : Наука; 1987. 464 с.
Nigmatulin RI. *Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1*. Hemisphere, N.Y.; 1990. 532 p.

[5] Верещагин АС, Казанин ИВ, Зиновьев ВН, Фомин ВМ. Численное моделирование обогащения воздушно-гелиевой смеси бифункциональным сорбентом на основе стеклянных микросфер. *Прикладная механика и техническая физика*. 2022;**63**(5):3–19.
DOI: 10.15372/PMTF20220501
Vereshchagin AS, Kazanin IV, Zinoviev VN, Fomin VM. Numerical simulation of enrichment of the air-helium mixture with a bifunctional sorbent based on glass microspheres. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022;**63**(5):731–745.
DOI: 10.1134/S0021894422050017

[6] Верещагин АС, Казанин ИВ, Зиновьев ВН, и др. Математическая модель проницаемости микросфер с учетом их дисперсионного распределения. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013;**54**(2):88–96. EDN: rjzesb
Vereshchagin AS, Kazanin IV, Zinoviev VN, et al. Mathematical model of permeability of microspheres with allowance for their size distribution. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013;**54**(2):243–250. DOI: 10.1134/S0021894413020090

[7] Верещагин АС, Фомин ВМ, Зиновьев ВН, Казанин ИВ, Пак АЮ, Лебига ВА. Исследование процесса поглощения гелия микросферами и композитным сорбентом на их основе. *Прикладная механика и техническая физика*. 2021;**62**(3):60–70. DOI: 10.15372/PMTF20210306
Vereshchagin AS, Fomin VM, Zinoviev VN, Kazanin IV, Pak AYu, Lebiga VA. Investigation of helium absorption by microspheres and composite sorbent on their basis. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021;**62**(3):401–410.
DOI: 10.1134/S0021894421030068

[8] Верещагин АС, Зиновьев ВН, Казанин ИВ, Пак АЮ, Лебига ВА, Fomin VM. Модель адсорбции гелия и паров воды пористым композитным сорбентом на основе микросфер. *Доклады Академии Наук. Физика. Техн. науки*. 2020;**490**(1):18–23.
DOI: 10.31857/S2686740020010216
Vereshchagin AS, Zinovyev VN, Kazanin IV, Pak AY, Lebiga VA, Fomin VM. Model of helium and water vapor adsorption by a microsphere-based porous composite sorbent. *Doklady Physics*. 2020;**65**(2):46–50.
DOI: 10.1134/S1028335820020093

[9] Голубев ИФ. *Вязкость газов и газовых смесей*. М. : Физматгиз. 1959. 375 с.
Golubev I.F. *Viscosity of gases and gas mixtures*. M.:Fizmatgiz. 1959. 375 p (in Russian).

[10] Wilke CR. A viscosity equation for gas mixtures. *Journal of Chemical Physics*. 1950;**18**(4):517–519. DOI: 10.1063/1.1747673

[11] Barrer RM. *Diffusion in and through solids*. Reprint with corr. Cambridge: Univ. Press. 1951. 464 p.

[12] Chi-Wang S. *Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws: NASA/CR-97-206253. ICASE Report No 97-65*. Institute for Computer Applications in Science; Engineering NASA Langley Research Center. 1997. 80 p.

[13] Фролов МВ, Верещагин АС, Казанин ИВ. Определение гелиевой проницаемости кремнезёмных микросфер. *Челябинский физико-математический журнал*. 2024;**9**(2):311–323.
Frolov MV, Vereshchagin AS, Kazanin IV. Determination of helium permeability of silica microspheres. *Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal*. 2024;**9**(2):311–323 (in Russian).
DOI: 10.47475/2500-0101-2024-9-2-311-323


## Сведения об авторах / Information about the Authors


**Верещагин А.С.**
доктор физ.-мат. наук, доцент
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Vereshchagin A.S.**
Sc.D. (Physics & Mathematics), Assist. Prof.
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS
vereshchag@itam.nsc.ru
ORCID: 0000-0002-9785-3872

**Казанин И.В.**
кандидат физ.-мат. наук
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Kazanin I.V.**
Ph.D. (Physics & Mathematics)
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS
kazanin@itam.nsc.ru
ORCID: 0000-0002-6865-3142

**Зиновьев И.В.**
кандидат физ.-мат. наук
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Zinovyev V.N.**
Ph.D. (Physics & Mathematics)
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS
mechmat@sb-ras.ru
ORCID: 0000-0002-5373-8274

**Фомин В.М.**
доктор физ.-мат. наук, профессор, академик РАН
Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

**Fomin V.M.**
Sc.D. (Physics & Mathematics)
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS
mechmat@sb-ras.ru
ORCID: 0000-0002-2811-0143