ISSN: 2658–5782

Номер 2

2025

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782

20 (2025) 2: 98–104

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2025.2.014
DOI 10.21662/mfs2025.2.014
УДК / UDC 539.3

Получена / Received 29.05.2025
Принята / Accepted 24.06.2025

Устойчивость трубопровода при продольно-поперечном изгибе в плоском канале

М.И. Макаров[1,2] ✉, **И.Л. Кузьмин**[3]

[1] Сколковский институт науки и технологий, Москва
[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва
[3] Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва

E-mail: ufamax2@gmail.com

Исследование посвящено актуальной проблеме устойчивости стержней в ограниченном пространстве, имеющей важное значение для технологий бурения скважин и строительства подземных переходов методом наклонно-направленного бурения. Целью работы является определение спектра критических сил, соответствующих различным формам контакта стержня с плоскими стенками канала. На основе классической теории изгиба Эйлера–Бернулли разработана аналитическая модель невесомого стержня между двумя жесткими плоскими поверхностями. Это позволило получить точные формулы для расчета критических сил, при которых стержень теряет устойчивость. Численное моделирование выполнено методом коллокации с адаптивным выбором сетки, реализованным в функции solve_bvp библиотеки SciPy. Этот метод позволяет учесть сложные граничные условия и нелинейные эффекты, которые могут влиять на устойчивость стержня. В результате исследования определены семь различных форм изгиба стержня и соответствующие им диапазоны критических сил от $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$ до $P_{cr} = 1296\pi^2 EJ/l^2$. Выявлены закономерности перехода от точечного контакта к линейному при увеличении нагрузки. Установлено, что при малых нагрузках стержень изгибается в форме синусоиды, а при больших принимает более сложные формы, включая формы с несколькими полуволнами. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными, что подтверждает их достоверность и практическую значимость. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании трубопроводов в нефтегазовой отрасли для предотвращения потери устойчивости конструкций. Это особенно важно при прокладке трубопроводов в сложных геологических условиях, где устойчивость стержней может быть нарушена из-за высоких нагрузок или ограничений пространства. Кроме того, результаты исследования могут быть полезны при разработке новых технологий бурения и строительства подземных переходов. Например, они могут быть использованы для оптимизации параметров бурового оборудования и конструкции подземных переходов, чтобы обеспечить их устойчивость и надежность. Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на изучение устойчивости стержней с учетом влияния температуры, влажности и других факторов, которые могут влиять на их свойства и поведение в ограниченном пространстве. Это позволит разработать более точные и надежные методы проектирования и эксплуатации конструкций в сложных условиях.

Ключевые слова: продольно-поперечный изгиб, устойчивость трубопровода, плоский канал, критическая сила, точечный контакт, линейный контакт

Pipeline stability under longitudinal and transverse bending in a plane channel

M.I. Makarov[1,2] ✉, **I.L. Kuzmin**[3]

[1] Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia
[2] National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
[3] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: ufamax2@gmail.com

The study is devoted to the urgent problem of the stability of rods in a confined space, which is important for the technologies of drilling wells and the construction of underground passages using directional drilling. The aim of the work is to determine the spectrum of critical forces corresponding to the various forms of contact of the rod with the flat walls of the channel. Based on the classical Euler-Bernoulli bending theory, an analytical model of a weightless rod between two rigid flat surfaces has been developed. This made it possible to obtain precise formulas for calculating the critical forces at which the rod loses stability. Numerical simulation is performed using the collocation method with adaptive grid selection implemented in the solve_bvp function of the SciPy library. This method allows you to take into account complex boundary conditions and nonlinear effects that can affect the stability of the rod. As a result of the study, seven different forms of rod bending and their corresponding ranges of critical forces were determined — from $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$ to $P_{cr} = 1296\pi^2 EJ/l^2$. The patterns of transition from point contact to linear contact with increasing load are revealed. It is established that at low loads the rod bends in the form of a sine wave, and at high loads it takes on more complex shapes, including shapes with several half—waves. The results obtained are in good agreement with experimental data, which confirms their reliability and practical significance. The results of the study can be used in the design of pipelines in the oil and gas industry to prevent the loss of structural stability. This is especially important when laying pipelines in difficult geological conditions, where the stability of the rods may be compromised due to high loads or space constraints. In addition, the results of the study may be useful in the development of new technologies for drilling and construction of underpasses. For example, they can be used to optimize the parameters of drilling equipment and the construction of underpasses to ensure their stability and reliability. Further research in this area may be aimed at studying the stability of rods, taking into account the influence of temperature, humidity and other factors that may affect their properties and behavior in a confined space. This will make it possible to develop more accurate and reliable methods for designing and operating structures in difficult conditions.

Keywords: longitudinal-transverse bending, pipeline stability, flat channel, critical force, point contact, line contact

1. Введение

Задача об устойчивости стержней в ограниченном пространстве имеет фундаментальное значение для ряда инженерных приложений, особенно в нефтегазовой отрасли. Исследование поведения трубопроводов при изгибе в скважинах критически важно для обеспечения безопасности конструкций, точности геодезических измерений, а также для анализа деформационных напряжений и контактных сил со стволом скважины.

В.И. Феодосьев [1] выдвинул гипотезу о возможности существования сложных форм плоского изгиба стержней в каналах, ограничивающих их прогиб при потере устойчивости. Эта гипотеза была экспериментально подтверждена Н.Т. Овчинниковым и Ф.Д. Сорокиным [2]. В современных исследованиях авторов [4] была разработана математическая модель для анализа напряжений изгиба направленных бурильных труб в многоствольных скважинах, показано, что основной причиной отказов является чрезмерный изгиб. Особое внимание в [5] уделяется влиянию латеральных колебаний бурильной колонны на устойчивость ствола скважины. Исследования показывают, что как латеральное ускорение, так и эффекты трения оказывают значительное влияние на устойчивость скважины, при этом начальное положение столкновения и размер зазора между бурильной колонной и стенкой скважины являются критическими факторами. Значительное развитие получили исследования устойчивости морских трубопроводов, особенно систем «труба в трубе» [6]. Авторы разработали методы контроля глобальной потери устойчивости таких систем с использованием распределенной плавучести, что решает проблему неустойчивости, вызванной высоким центром тяжести трубопровода. Российские исследования в области устойчивости морских трубопроводов на арктическом шельфе внесли важный вклад в понимание взаимодействия трубопровода с многолетнемерзлыми породами [7].

Целью настоящей работы является определение спектра критических сил, при которых происходит потеря устойчивости, и соответствующих форм изгиба стержня в плоском канале. Это позволит более точно прогнозировать поведение трубопроводов в реальных условиях эксплуатации, учитывая их геометрические и механические характеристики, а также особенности окружающей среды.

Для достижения поставленной цели необходимо провести теоретический анализ задачи с использованием методов теории упругости и механики деформируемого твердого тела. Особое внимание будет уделено учету граничных условий, определяющих взаимодействие стержня с каналом, а также влиянию начальных несовершенств формы и механических свойств материала на устойчивость системы.

Экспериментальные исследования, проведенные с использованием современных методов диагностики и моделирования, позволят верифицировать полученные теоретические результаты и уточнить границы применимости предложенной модели. Результаты работы будут полезны для разработки рекомендаций по проектированию и эксплуатации трубопроводов в условиях ограниченного пространства, что повысит надежность и безопасность нефтегазовых сооружений.

2. Постановка задачи и модель

Рассмотрим стержень в плоском канале, закрепленный на концах. На рис. 1 представлена расчетная схема трубопровода в плоском канале с указанием осей координат, действующих сил и граничных условий. Стержень длиной l находится между двумя жесткими плоскими поверхностями с зазором Δ и подвергается действию продольной силы P на обоих концах.

Примем, что при $P > \pi^2 EJ/l^2$ (E — модуль Юнга, J — момент инерции) существует зона l_2 плотного прилегания стержня к стенкам трубы. Составим уравнение упругой линии стержня на участке $0 \leqslant x \leqslant l_1$, где l_1 — расстояние от начала стержня до плотного прилегания; R обозначает реакцию основания — силу, с которой стенка канала действует на стержень в точке контакта:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} + Py = Rx.$$

Дважды продифференцировав уравнение и прини-

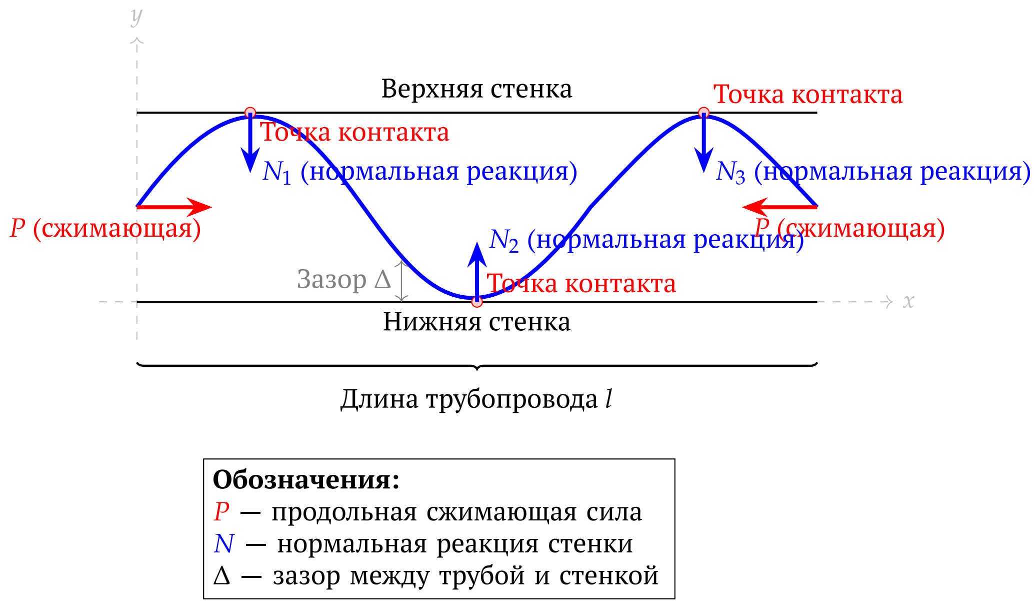

Рис. 1. Расчетная схема трубопровода в плоском канале

мая $\alpha^2 = P/(EJ)$, получим уравнение изгиба [3]:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \alpha^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{1}$$

Общее решение (1) имеет вид:

$$y(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Cx + D.$$

Ставим пять граничных условий для определения l_1 помимо констант:

$$y(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y(l_1) = \Delta,\ y'(l_1) = 0,\ y''(l_1) = 0.$$

Подставив граничные условия, получаем:

$$y(0) = B + D = 0, y''(0) = -B\alpha^2 = 0 \Rightarrow B = 0, D = 0;$$

$$y'(l_1) = A\alpha\cos\alpha l_1 + C = 0, y''(l_1) = -\alpha^2 A\sin\alpha l_1 = 0,$$

$$y(l_1) = A\sin\alpha l_1 + Cl_1 = \Delta \Rightarrow A \neq 0, \sin\alpha l_1 = 0 \Rightarrow$$

$$C = \frac{\Delta}{l_1} \Rightarrow A = \frac{-\Delta}{l_1\alpha\cos\alpha l_1} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha l_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha l_1 = \pi n, n = 1 \Rightarrow l_1 = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow A = \frac{\Delta}{\pi}.$$

И тогда итоговое решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{\Delta}{\pi}(\sin\alpha x + \alpha x).$$

Так как продольную нагрузку можно записать в виде $P = \alpha^2 \cdot EJ$ (из определения α), то выразив α через l_1, мы получаем нагрузку, зависящую от l_1 вместо l:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что прилегание начнется при силе $P = 4\pi^2EJ/l^2$, так как $l_1 \leqslant l/2$. Следовательно, точка касания не может превышать середину стержня. Соответственно, при силе $\pi^2EJ/l^2 \leqslant P \leqslant 4\pi^2EJ/l^2$ происходит одно-точечный контакт, а при большей силе начинается прилегание по участку.

Однако, если средний участок l_2 станет достаточно длинным, то на нем также может произойти потеря устойчивости. Определим при какой длине l_1 это произойдет. Критическая сила для среднего участка будет $P = \pi^2EJ/l_2^2$, $l_2 = l - 2l_1$, но в то же время она равна $P = \pi^2EJ/l_1^2$. Приравняв выражения, найдем $l_1 = l/4$ и $P = 16\pi^2EJ/l^2$.

После того как средний участок изогнется, можно рассматривать каждую треть стержня как новый самостоятельный стержень и, соответственно, изменится и расстояние от начала стержня до плотного прилегания $l_1 = l/6$ одномоментно. Проведя вычисления, аналогичные предыдущим, найдем критическую силу $P = 36\pi^2EJ/l^2$, при которой вновь начнется прилегание к стенкам по участкам.

При силе $16\pi^2EJ/l^2 \leqslant P \leqslant 36\pi^2EJ/l^2$ происходит трех-точечный контакт, при большей силе снова начинается прилегание, но уже на трех участках.

Считаем, что волны изгиба равномерны и изгиб на трех участках происходит одинаково и одновременно. Рассмотрим первую полуволну (левую), у которой при силе $P = 36\pi^2EJ/l^2$ начинается прилегание. Тогда $l_1 = l/6$ и постепенно уменьшается при большей силе, так как растет $l_2 = l/3 - 2l_1$. Приравнивая силы, как это было сделано ранее, получим критическую силу $P = 144\pi^2EJ/l^2$, при которой произойдет вторичная потеря устойчивости (у всех трех полуволн в нашей работе) и длина l_1 скачком изменится до $l/18$.

Повторив процедуру, считая что изгиб будет одина-

Таблица 1. Формы изгиба стержня и нагрузки

Номер формы n	Число полуволн изгиба w	Вид контакта	Безразмерное усилие $\bar{P}$
1	0	отсутствует	$\bar{P} \leqslant 1$
2	1	одна точка	$1 \leqslant \bar{P} \leqslant 4$
3	1	одна линия	$4 \leqslant \bar{P} \leqslant 16$
4	3	три точки	$16 \leqslant \bar{P} \leqslant 36$
5	3	три линии	$36 \leqslant \bar{P} \leqslant 144$
6	9	девять точек	$144 \leqslant \bar{P} \leqslant 324$
7	9	девять линий	$324 \leqslant \bar{P} \leqslant 1296$

ковым на всех 9-и полуволнах, найдем силу при которой вновь начнется линейный контакт:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2} = \frac{324\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Выполнив аналогичные операции, получим силу, необходимую для вторичной потери устойчивости:

$$l_2 = \frac{l}{18} - 2l_1 \to P = \frac{1296\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Дальнейший изгиб не отличается от предыдущих этапов, исходя из теории, однако, как показал физический эксперимент, рассматривать его нет смысла ввиду того, что изгиб практически не происходит одновременно и одинаково даже на 3-х полуволнах, а на 9-и полуволнах вероятность последующего изгиба мала и представляет существенные сложности как в изучении, так и в практическом применении.

Формы изгиба представлены на рис. 2, а количественные результаты, являющиеся спектром критических сил (это последовательность значений продольной нагрузки, при которых стержень (трубопровод) между двумя жесткими плоскими стенками теряет устойчивость и меняет форму изгиба; физически это означает, что при достижении каждой из этих нагрузок возникает новая форма контакта стержня со стенками: сначала точечный, затем линейный, затем множественные точки и линии контакта) приведены в табл. 1, где использовались следующие обозначения: $\bar{P} = P/P_{cr}$ — безразмерное усилие; $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$ — критическое усилие при потере устойчивости по Эйлеру; P — усилие на концах стержня (E — модуль Юнга материала стержня; I — момент инерции сечения стержня).

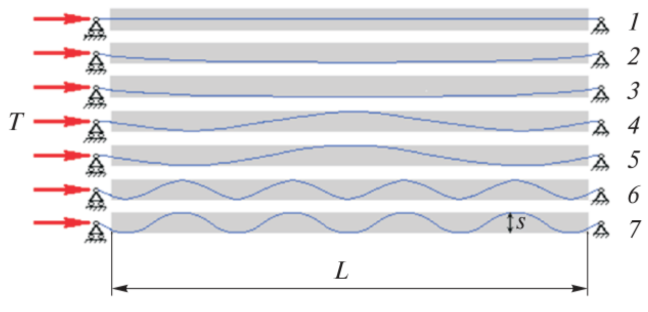

Рис. 2. Формы изгиба

3. Результаты моделирования

При построении численного решения используем некоторые результаты, полученные при аналитическом решении. Поскольку длина $l_1 = \pi/\alpha$ уже определена, то при численном решении ставятся только 4-е граничных условия. Соответственно, для левой части рассматриваются 4-е вида граничных условий:

1) $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y(l_1) = \Delta$, $y'(l_1) = 0$ соответствует шарнирному закреплению левого конца стержня и условию касания со стенкой в точке l_1;

2) $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l_1) = \Delta$, $y'(l_1) = 0$ соответствует жесткому закреплению левого конца;

3) $y(0) = 0$, $y'''(0) = 0$, $y(l_1) = \Delta$, $y'(l_1) = 0$ соответствует шарнирному закреплению с возможностью горизонтального смещения;

4) $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y(l_1) = \Delta$, $y''(l_1) = 0$ соответствует шарнирному закреплению с условием отсутствия изгибающего момента в точке контакта.

Физически обоснованными для рассматриваемой задачи являются первый и третий варианты граничных условий, поскольку они соответствуют реальным условиям закрепления трубопровода в скважине. Второй вариант не соответствует условиям шарнирного закрепления, а четвертый приводит к некорректным результатам из-за нарушения условия непрерывности изгибающего момента.

Используется численный метод коллокации с адаптивным выбором сетки (collocation method with adaptive mesh refinement), реализованный в функции solve_bvp библиотеки SciPy. Этот метод сочетает конечно-разностную дискретизацию (уравнения преобразуются в алгебраическую систему через аппроксимацию производных на сетке), кусочно-кубическую интерполяцию (решение представляется в виде полиномов 3-го порядка на каждом интервале сетки), адаптивное уточнение сетки (алгоритм автоматически увеличивает плотность узлов в областях высокой нелинейности для контроля погрешности), квазилинеаризацию (для нелинейных задач используется итерационное линеаризованное приближение).

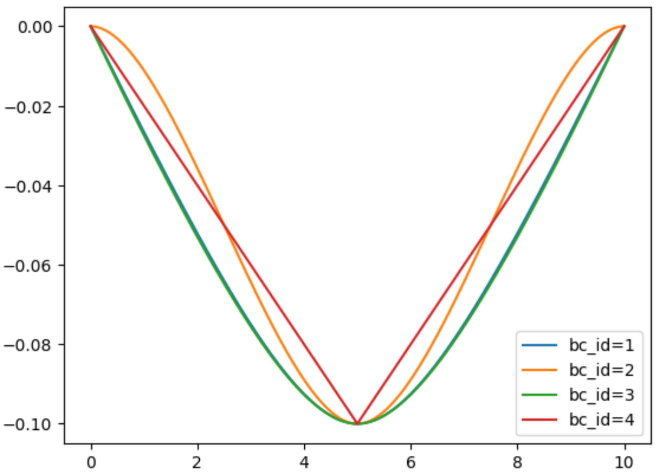

Рис. 3. Различные виды граничных условий

Параметры решения: относительная погрешность tol = 1e-3, максимальное число узлов сетки max_nodes = 1000. Метод обоснован сложными граничными условиями, резкими изменениями решения (зоны контакта/отрыва), неявными граничными условиями (условия в точке контакта $y(l_1) = \Delta, y'(l_1) = 0$) [8, 9].

Результаты моделирования представлены на рис. 3. Физические параметры модели: длина стержня $l = 5$ м, ширина канала $s = 0.45$ м, ширина зазора $\Delta = 0.2$ м, диаметр трубы $d = 0.05$ м, толщина трубы $h = 0.005$ м, геометрический момент инерции кольца $J = (\pi d^4/64) \cdot (1 - ((d-2h)/d)^2) = 1.81 \times 10^{-7}$ м^4, модуль Юнга для нержавеющей стали $E = 2.06 \times 10^{11}$ Н/м^2. Как видно из рис. 3, решения при первом и третьем виде совпадают, а при остальных не являются обоснованными с физической точки зрения. Поэтому будем использовать первое или третье граничное условие.

Критическая сила Эйлера равна

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = 14730.695 \text{ Н}.$$

Особенностью моделирования является то, что каждая полуволна считается отдельно со своим граничным условием. Также каждая полуволна разбивается на левый, средний и правый участки. При некоторых усилиях средний участок вырождается и остаются только крайние участки.

На рис. 4–10 представлены численные решения задачи для различных форм изгиба, приведенных в табл. 1. Видно, что:

- при $0 \leqslant \bar{P} \leqslant 1$ изгиба стержня не происходит из-за недостаточного усилия (рис. 4);
- при $1 \leqslant \bar{P} \leqslant 4$ происходит изгиб с контактом в одной точке — середине стержня, обладающей наименьшей жесткостью (рис. 5);
- при $4 \leqslant \bar{P} \leqslant 16$ происходит прилегание к стенке, величина длины которого пропорциональна усилию (рис. 6);

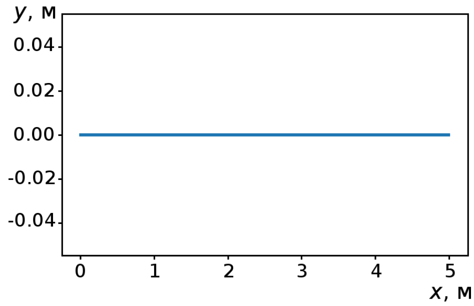

Рис. 4. Форма изгиба при нагрузке меньше критической: $0 \leqslant \bar{P} \leqslant 1$

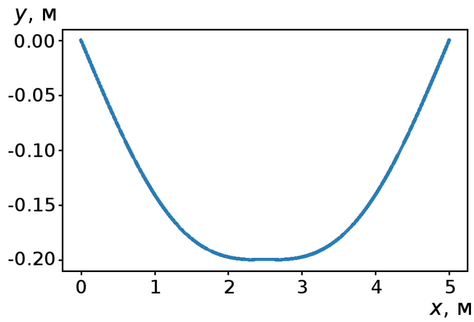

Рис. 5. Форма изгиба при критической нагрузке: $1 \leqslant \bar{P} \leqslant 4$ ($l_1 = 2.5$ м)

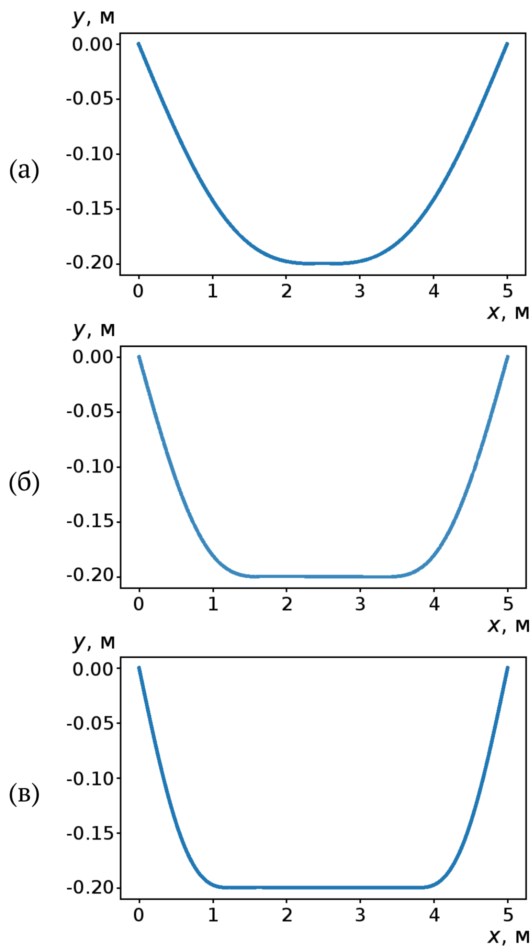

Рис. 6. Форма изгиба при прилегании трубопровода: (а) $\bar{P} = 4.1$ ($l_1 = 2.469$ м), (б) $\bar{P} = 9$ ($l_1 = 1.667$ м), (в) $\bar{P} = 15.99$ ($l_1 = 1.25$ м)

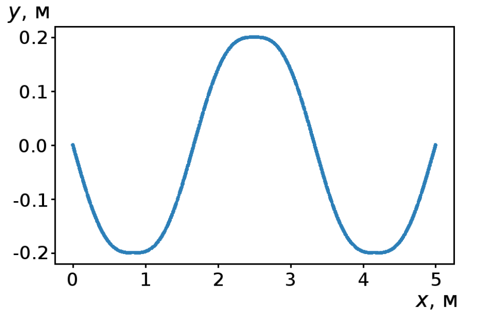

Рис. 7. Форма изгиба при образовании трех полуволн: $16 \leqslant \bar{P} \leqslant 36$ ($l_1 = 0.833$ м)

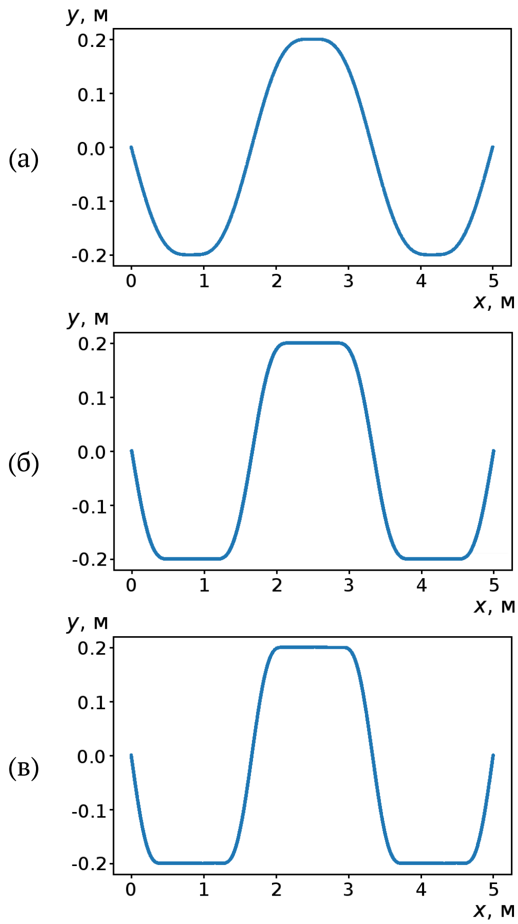

Рис. 8. Форма изгиба при повторном прилегании: (а) $\bar{P} = 40$ ($l_1 = 0.791$ м), (б) $\bar{P} = 100$ ($l_1 = 0.5$ м), (в) $\bar{P} = 143.99$ ($l_1 = 0.417$ м)

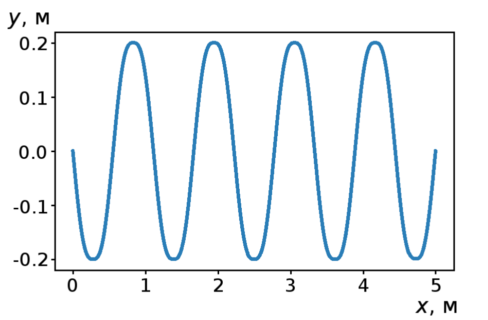

Рис. 9. Форма изгиба при образовании девяти полуволн: $144 \leqslant \bar{P} \leqslant 324$ ($l_1 = 0.278$ м)

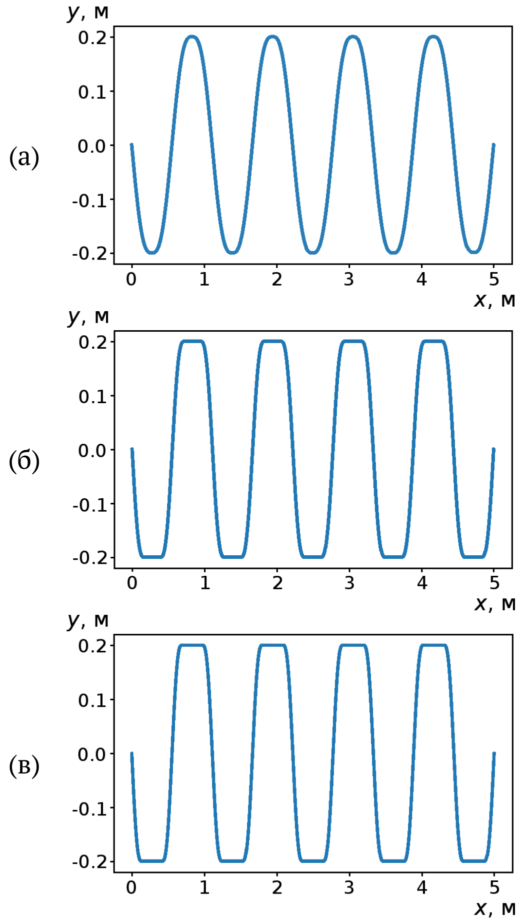

Рис. 10. Форма изгиба при множественном прилегании: (а) $\bar{P} = 330$ ($l_1 = 0.275$ м), (б) $\bar{P} = 900$ ($l_1 = 0.167$ м), (в) $\bar{P} = 1295.99$ ($l_1 = 0.139$ м)

- при $16 \leqslant \bar{P} \leqslant 36$ происходит вторичная потеря устойчивости на среднем участке, и образуются 3-и полуволны изгиба, каждая из которых касается стенки (рис. 7);
- при $36 \leqslant \bar{P} \leqslant 144$ каждая полуволна образует линейный контакт со стенкой (рис. 8);
- при $144 \leqslant \bar{P} \leqslant 324$ происходит потеря устойчивости на средних участках полуволн и образование 9-и полуволн (рис. 9);
- при $324 \leqslant \bar{P} \leqslant 1296$ снова проявляется линейный контакт у каждой полуволны (рис. 10).

4. Заключение

В результате проведенного исследования получено аналитическое и численное решение задачи о продольно-поперечном изгибе невесомого стержня в плоском канале с жесткими стенками. Разработанная модель, основанная на классической теории изгиба Эйлера–Бернулли, позволила определить полный спектр критических сил (последовательность значений продольной нагрузки, при которых стержень (трубопровод) между двумя жесткими плоскими стенками теряет устойчивость и меняет форму изгиба) и соответствующих им форм деформации стержня при различных уровнях нагружения.

Установлено существование семи различных форм изгиба стержня с диапазонами критических сил от $P_{cr} = \pi^2 EJ/l^2$ до $P_{cr} = 1296\pi^2 EJ/l^2$. Выявлена закономерность перехода от простых форм деформации к сложным: от одноточечного контакта при малых нагрузках к многоточечному и линейному контакту при увеличении продольной силы. Показано, что при достижении определенных критических значений нагрузки происходит качественное изменение характера деформации с образованием дополнительных полуволн изгиба (3, 9 полуволн).

Численное моделирование методом коллокации с адаптивным выбором сетки подтвердило корректность аналитических решений и позволило детально исследовать переходные процессы между различными формами изгиба. Установлено, что физически обоснованными являются граничные условия первого и третьего типов, соответствующие реальным условиям закрепления трубопровода в скважине.

Полученные результаты имеют важное практическое значение для проектирования и эксплуатации трубопроводных систем в нефтегазовой отрасли, особенно при использовании технологий наклонно-направленного бурения и строительства подземных переходов. Разработанная модель позволяет прогнозировать критические нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости трубопровода, что необходимо для обеспечения безопасности и надежности конструкций.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет влияния трения между стержнем и стенками канала, веса трубопровода, а также на разработку трехмерных моделей для анализа устойчивости в криволинейных скважинах сложной геометрии. Перспективным направлением является также применение современных методов машинного обучения для оптимизации параметров системы и предсказания поведения трубопроводов в реальных условиях эксплуатации

Авторы выражают благодарность руководителю выпускных квалификационных работ по программе бакалавриата Урманчееву Саиду Федоровичу за помощь и ценные советы при подготовке данной работы.

Список литературы / References

[1] Феодосьев ВИ. *Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов.* 5-е изд., испр. и доп. М.: Наука, Физматлит; 1996. 368 с. Feodosyev VI. *Selected Problems and Questions in Strength of Materials.* Beekman Books Inc.; 1977. 432 p.

[2] Овчинников НТ, Сорокин ФД. Численное и физическое моделирование деформирования стержня при осевом нагружении в канале. Часть 1. *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2020;**10**(106):1–23.
Ovchinnikov NT, Sorokin FD. Physical modeling and numerical simulation of bar deformation under axial loading in the channel. Part 1. *Engineering Journal: Science and Innovation.* 2020;**10**(106):1–23 (in Russian). DOI: 10.18698/2308-6033-2020-10-2021

[3] Биргер ИА, Пановко ЯГ. *Прочность, устойчивость, колебания. Справочник.* В 3-х томах. М.: Машиностроение, 1968; 415 с.
Birger IA, Panovko YaG. *Strength, Stability, Vibrations. Handbook.* In 3 volumes. Moscow: Mashinostroenie; 1968. 415 p. (in Russian).

[4] Zhang Y, Shu J. Numerical modeling and the ultimate bending experiment of the directional drill pipes bending at the dog-leg of the multi-branch well. *Heliyon.* 2024;**10**(19):e38314.
DOI: 10.1016/j.heliyon.2024.e38314

[5] Ma T, Huang J, Li Z, Shi Y, Jia L, Zhong C. Influence of drill-string lateral collision on wellbore stability of a horizontal well. *Advances in Mechanical Engineering.* 2022;**14**(6).
DOI: 10.1177/16878132221107280

[6] Zhang Z, Chen Z, Liu H. Lateral Buckling of Pipe-in-Pipe Systems under Sleeper-Distributed Buoyancy—A Numerical Investigation. *Metals.* 2022;**12**(7):1094. DOI: 10.3390/met12071094

[7] Лаптева ТИ. *Разработка методов обеспечения работоспособности морских нефтегазопроводов в сложных инженерно-геологических условиях арктического шельфа.* Дисс. докт. техн. наук. Москва. Науч.-исслед. ин-т природных газов и газовых технологий — Газпром ВНИИГАЗ; 2019. 289 с.
Lapteva TI. *Development of methods to ensure the operability of offshore oil and gas pipelines in complex engineering and geological conditions of the Arctic shelf.* Sc.D. Thes. Moscow. Research Institute of Natural Gases and Gas Technologies — Gazprom VNIIGAZ; 2019. 289 p (in Russian).

[8] SciPy: scipy.integrate. [online] Available from: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_bvp.html (Accessed 24.06.2025).

[9] Mazzia F, Magherini C. *Test Set for Initial Value Problem Solvers. Technical Report 4/2008.* University of Bari, Bari; 2008.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Макаров Максим Игоревич
Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Makarov Maksim Igorevich
Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia;
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia
ufamax2@gmail.com
ORCID: 0009-0001-8159-1134

Кузьмин Игорь Леонидович
Московский государственный технический университет имени Н.Э Баумана, Москва, Россия

Kuzmin Igor Leonidovich
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
igor_l_kuzmin@mail.ru
ORCID: 0009-0002-7197-1544